

海洋浮体工学特論

2007 年度講義資料

九州大学大学院総合理工学府
大気海洋環境システム学専攻
海洋システム力学講座

柏 木 正

海洋浮体工学特論

目 次

第 1 章	水波に関する基礎知識	1
1.1	連続の式, オイラー方程式	1
1.2	ポテンシャル流れ	2
1.3	境界条件式	3
1.4	エネルギー保存の原理	4
1.5	運動量保存の原理	6
1.6	二次元進行波	7
1.7	群速度	9
1.8	波のエネルギーとその伝播速度	10
第 2 章	グリーン関数	12
2.1	周期的吹き出しによる速度ポテンシャル	12
2.2	グリーンの公式	17
2.3	Kochin 関数	19
第 3 章	2次元造波理論	20
3.1	物体表面境界条件式	20
3.2	Kochin 関数, 進行波の成分分離	22
3.3	流体力の計算式	24
3.4	反射波, 透過波の計算式	25
3.5	グリーンの公式適用による各種関係式の導出	27
	付加質量, 減衰力係数の対称関係	28
	エネルギー関係式	29
	Haskind-Newman の関係	30
	Radiation wave と Diffraction wave の関係	31
	別所の関係	32
	左右非対称物体の diffraction 問題での Kochin 関数	33
	エネルギー等分配則	33
3.6	左右対称浮体の動揺特性	34
第 4 章	消波・波吸収理論	39
4.1	左右対称浮体固定時の反射波, 透過波	39
4.2	左右対称浮体動揺時の反射波, 透過波	40
4.3	波漂流力	42
4.4	左右対称浮体による消波・波吸収理論	45

4.5	片側波なし浮体による消波・波吸収理論	48
4.6	左右対称浮体による片側波なし条件	49
4.7	エネルギー吸収理論再考	51
第5章	係留ラインと浮体の相互作用	53
5.1	カテナリの理論	53
5.2	定常風あるいは定常流がある時の係留ライン	55
5.3	係留ラインによる復原力の線形ばね定数	58
第6章	複数浮体の相互作用	62
6.1	各要素浮体の散乱特性	62
6.2	複数浮体の diffraction 問題	64
6.3	双胴浮体の diffraction 問題	64
6.4	複数浮体の radiation 問題	67
6.3	双胴浮体の radiation 問題	68
第2章の付録	グリーン関数の数値計算法	71
(2.20) 式	の証明について	74
グリーン関数の補遺		75
2.4	加速度ポテンシャルと初期値問題の定式化	75
2.5	Cauchy-Poisson の初期値問題の解	76
2.6	自由表面上の圧力分布問題	77
2.7	グリーン関数の導出	78

第 1 章 水波に関する基礎理論

海洋浮体の波浪中での運動を理論的に理解するためには水波に関する理論，すなわち流体力学の知識は不可欠である．ここでは流体力学を“力学”として見直すことから始め，波の特性に関する基本的事項についてまとめる．

1.1 連続の式，オイラー方程式

流体力学は流体に関する“力学”である．したがってその基礎方程式は，一般力学と同様に，質量保存則，運動量保存則，エネルギー保存則などから導かれるはずである．

まず質量保存則について考えてみよう．力学の教えるところによれば，保存則は同じ領域内の諸量に対して成り立つのであるから，密度 ρ の，ある流体領域 V を考えると，質量保存則は次のように表すことができる．

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0 \quad (1.1)$$

ただし，保存則を考えている流体領域 V はいつも同じでなければならず，それは時間的に変動するので $V = V(t)$ であることに注意すべきである．

次に，同様のことを運動量保存則について考えてみよう．ニュートンの第 2 法則で知られているように，運動量の時間的変化は考えている流体領域 V に働く力の和に等しい．水波に関する現象では粘性の影響は小さいと考えられるので，粘性による剪断力は無視し，直圧力と重力だけを考えれば， i 方向 ($i = 1$ は x , $i = 2$ は y , $i = 3$ は z とする) の運動量保存則は次のように書くことができる．

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u_i dV = - \iint_S p n_i dS + \iiint_V \rho g \mathbf{k} dV \quad (1.2)$$

上式で p は圧力， n_i は法線の i 方向成分， g は重力加速度， \mathbf{k} は z 軸方向の単位ベクトルであり， S は考えている流体領域 V の表面を表すこととする．

水波の理論では密度 ρ は時間的に変化せず，何らかの形で与えられると考えてよいので，(1.2) 式中の未知数は u_i ($i = 1 \sim 3$) と p の 4 個である．ところで (1.1) 式は 1 つの条件式を与え，(1.2) 式は 3 つの条件式を与えるので，以上の式に適当な初期条件，境界条件を課せば，一般力学と同様に流場が決定されることになる．

(1.1)，(1.2) 式はある流体領域に着目して，それをずっと追跡するという，いわゆる Lagrange 的取り扱いである．これを空間固定座標系で記述することを考えてみよう．(1.1)，(1.2) 式の領域 V が時間の関数であることを考慮して次式について調べる．

$$I(t) = \iiint_{V(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \quad (1.3)$$

流体領域 V の境界面 S が動く場合，その法線速度を U_n とする．このとき，微小時間後の変化は，

$$\Delta I = I(t + \Delta t) - I(t) = \iiint_{V(t+\Delta t)} F(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \iiint_{V(t)} F(\mathbf{x}, t) dV \quad (1.4)$$

ここで

$$F(\mathbf{x}, t + \Delta t) = F(\mathbf{x}, t) + \Delta t \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + O[(\Delta t)^2] \quad (1.5)$$

と近似することができる．同様に，微小時間後ということでは $(\Delta t)^2$ 以上の高次項を省略するという考え方をすると， $V(t + \Delta t)$ と $V(t)$ との差は $S(t + \Delta t)$ と $S(t)$ とではさまれた微小体積 ΔV であって，それは $S(t) \times U_n \Delta t$ と考えることができる．したがって

$$\begin{aligned}\Delta I &= \iiint_{V+\Delta V} \left(F + \Delta t \frac{\partial F}{\partial t} \right) dV - \iiint_V F dV \\ &= \Delta t \iiint_V \frac{\partial F}{\partial t} dV + \iiint_{\Delta V} F dV + O[(\Delta t)^2] \\ &= \Delta t \iiint_V \frac{\partial F}{\partial t} dV + \Delta t \iint_S F U_n dS + O[(\Delta t)^2]\end{aligned}\quad (1.6)$$

この式から $\Delta t \rightarrow 0$ の極限操作によって $I(t)$ の時間微分を求めると，次式を得ることができる．

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_V \frac{\partial F}{\partial t} dV + \iint_S F U_n dS \quad (1.7)$$

(1.7) 式は輸送定理 (transport theorem) と呼ばれている．

さて，この定理を (1.1) 式に適用してみよう．流体領域 $V(t)$ の境界面は流体と同じ速度で動いていると考えるので $U_n = u_j n_j$ である．したがって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV &= \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho u_j n_j dS \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) \right] dV = 0\end{aligned}\quad (1.8)$$

(1.8) 式を導く過程でガウスの定理のテンソル表示を用いた．この積分はある瞬間 t について行われ，しかも任意の領域に対して成立しなければならないので，次式が成り立つことになる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (1.9)$$

質量保存則から得られたこの式は連続の式 (equation of continuity) と呼ばれる．

流体が非圧縮であれば (1.9) 式は次のように簡略化され速度 \mathbf{u} に関する条件式を与える．

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{または} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.10)$$

同様に transport theorem (1.7) を (1.2) 式に適用してみよう．ガウスの定理を用いると (1.2) 式は次のようになる．

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \right] dV = \iiint_V \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g \delta_{i3} \right] dV \quad (1.11)$$

(1.8) 式と同様に考えて，被積分関数をゼロとおき，更に連続の式 (1.9) 式を代入すると次式が得られる．

$$\frac{Du_i}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g \delta_{i3} \quad (1.12)$$

これは運動量保存則から得られたものであり，一般力学におけるニュートンの運動方程式に対応する．従って左辺は Lagrange 的取り扱いにおける流体粒子の加速度を表している．このことから D/Dt の演算を実質微分 (substantial derivative) と呼び，(1.12) 式をオイラー方程式 (Euler's equation) と称する．

1.2 ポテンシャル流れ

さて，水波の問題の殆どは渦なし，すなわち非回転流れ $\nabla \times \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u} = 0$ として取り扱えるので，そのような場合について (1.10) 式，(1.12) 式を考えてみよう．

ベクトル解析の公式によると，任意のスカラー関数 Φ に対して常に $\text{rot grad } \Phi = \nabla \times \nabla \Phi = 0$ であるから， $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ が成り立つならば $\mathbf{u} = \nabla \Phi$ となるスカラー関数が存在することになる． \mathbf{u} はベクトル

であるから 3 成分の未知数であるのに対して、 Φ は一つの未知数である。 Φ が求まったとすると、その微分を考えることによって直ちに速度成分が求まる。このことから Φ を速度ポテンシャル (velocity potential) と呼び、 Φ で記述できる流れをポテンシャル流れと言う。

さて、 $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ を (1.10) 式に代入すると、

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = 0 \quad (1.13)$$

が得られるが、これは偏微分方程式におけるラプラスの式として有名である。すなわち (1.13) 式は速度ポテンシャル Φ に対する支配方程式と考えることができる。上式は質量保存則から得られたことに注意しよう。

では運動保存則を表した (1.12) 式はポテンシャル流れではどうなるのだろうか。それを考えるために、次のようなテンソル表示による変形

$$\begin{aligned} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i &\equiv u_j \partial_j u_i = u_j (\partial_j u_i - \partial_i u_j) + u_j \partial_i u_j \\ &= u_j \varepsilon_{kji} (\nabla \times \mathbf{u})_k + \frac{1}{2} \partial_i (u_j u_j) = \frac{1}{2} \nabla (\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) \end{aligned} \quad (1.14)$$

に注意する。そうすると (1.12) 式が次式となることがわかる。

$$\nabla \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + \frac{p}{\rho} - gz \right] = 0 \quad (1.15)$$

すなわち

$$p + \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi - \rho gz = p_0 \quad (1.16)$$

ここで z は鉛直下向きの座標を表している。 p_0 は一定値で、ここでは攪乱のない静止水面上での圧力、すなわち大気圧と考えてよい。

(1.16) 式は p と速度ポテンシャルの関係を表したもので、ベルヌーイの圧力方程式 (Bernoulli's pressure equation) と呼ばれている。ポテンシャル流れでは、オイラー方程式は、求められた速度ポテンシャルから単に圧力を計算するための式となっていることに注意しよう。

1.3 境界条件式

速度ポテンシャルの支配方程式がラプラスの式であることがわかったが、それを解くためには境界条件を与えなければならない。境界面が $F(x, y, z, t) = 0$ という関数形で与えられている場合には、境界条件は必ず境界面の実質微分を考えることによって求められる。なぜなら、境界面での流体粒子は必ず境界面と同じ動きをするのであるから、次式が成立しているはずである。

$$\frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\Phi \cdot \nabla \right) F = 0 \quad (1.17)$$

ここで F は与えられるとしており、また F を使って境界面上での法線ベクトルが $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$ と計算できるので、上式を $|\nabla F|$ で割り算すると

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = - \frac{1}{|\nabla F|} \frac{\partial F}{\partial t} \equiv V_n \quad \text{on } F = 0 \quad (1.18)$$

となる。これは速度ポテンシャル Φ に関する境界条件式を与える。(1.17) 式は運動学的条件 (kinematic condition) と言われる。

ところで水波の問題では、水面も境界面の一つである。この境界面を一般に自由表面 (free surface) と呼び、そこでの境界条件式を自由表面条件と言う。水面形状が $z = \zeta(x, y, t)$ で与えられたとすると、

$$F = z - \zeta(x, y, t) = 0 \quad (1.19)$$

とおけば, (1.17) 式あるいは (1.18) 式に代入することによって速度ポテンシャルに関する条件式が与えられるはずである. ところが $\zeta(x, y, t)$ は求めるべきものであって, 一般には (1.18) 式だけでは条件式とは言えない. すなわち, 自由表面ではもう一つ条件が必要である. そこで, 自由表面上での圧力は大気圧に等しいという, いわゆる動力学的条件 (dynamic condition) を付け加える. これは (1.16) 式より

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - g\zeta = 0 \quad \text{on } z = \zeta(x, y, t) \quad (1.20)$$

である. 原理的には, (1.18), (1.20) 式から ζ を消去すれば速度ポテンシャルに関する境界条件となる. しかしこれは Φ に関して非線形な条件式となり, しかも (1.20) 式からわかるように適用すべき位置 $\zeta(x, y, t)$ は求めるべきものである.

このような複雑さのために線形化という手法が用いられる. すなわち, 攪乱が小さい, 言い換えれば速度ポテンシャル Φ が小さいと仮定して, $O(\Phi^2)$ 以上の項を省略するのである. このとき, まず (1.20) 式より

$$\zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + O(\Phi^2) \quad (1.21)$$

(1.17) 式は

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} + O(\zeta \Phi) = 0 \quad (1.22)$$

となるので ζ を消去すると

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + O(\Phi^2) = 0 \quad (1.23)$$

を得ることができる. しかし上式では条件の適用位置が明確に示されていないが, ζ が小さいことから $z = 0$ の静止水面まわりにテイラー展開することを考えよう. このとき

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, 0, t) + \zeta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} + \dots \quad (1.24)$$

からもわかるように, 自由表面条件式 (1.23) を $z = 0$ に適用することによって生じる誤差は $O(\Phi^2)$ 以上の高次である. したがって線形自由表面条件式は次のように書くことができる.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (1.25)$$

以上のように, 自由表面での境界条件式を導くことはやや複雑であるが, もう少し便利な方法がある. それは, 自由表面においては, 圧力 (大気圧に等しい) も流体粒子の動き (すなわち自由表面上) に合わせて常に一定値をとるのであるから, 圧力の実質微分をゼロとおくことである. すなわち (1.16) 式を用いて

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \right) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - gz \right] = 0 \quad \text{on } z = \zeta \quad (1.26)$$

によって Φ に関する条件式が得られる. ただし, ζ は (1.20) 式で与えなければならない. (1.26) 式から線形自由表面条件式 (1.25) 式を得る方法は上述のとおりである.

その他の境界条件式についてはその都度説明することとする.

1.4 エネルギー保存の原理

さて, この節と次の節では物体に働く流体力の計算や, 流体の特性を調べるのに有用な方法について述べることにする. まず, 流体内のエネルギー, 及びその時間変化について調べる. 一般力学の知識によれば, ある流体 V 内のエネルギーは, 運動エネルギーと位置エネルギーとの和を考えればよいので, エネルギーは次式で与えられる.

$$E = \iiint_V \rho \left[\frac{1}{2} v^2 - gz \right] dV = \iiint_V \rho \left[\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - gz \right] dV \quad (1.27)$$

ここで $v = |\mathbf{u}|$ であり, z 軸は鉛直下向きを正としている.

次にこのエネルギーの時間変化率を考えてみる. (1.27) 式の流体領域の境界面が外向き法線 U_n で移動するとして, (1.17) 式の transport theorem を (1.27) 式に適用すると,

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \rho \frac{d}{dt} \iiint_V \left[\frac{1}{2} v^2 - gz \right] dV \\ &= \rho \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} v^2 - gz \right] dV + \rho \iint_S \left[\frac{1}{2} v^2 - gz \right] U_n dS\end{aligned}\quad (1.28)$$

ここで, 圧力は大気圧を基準に考えることにしてベルヌーイの圧力式 (1.16) を用いると

$$\frac{1}{2} v^2 - gz = - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (1.29)$$

また

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} v^2 \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right] = \nabla \Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla \Phi \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla \Phi \right) \quad (1.30)$$

であるから, ガウスの定理を用いて体積積分を面積分に変換すると,

$$\frac{dE}{dt} = \rho \iint_S \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \left(\frac{1}{2} v^2 - gz \right) U_n \right] dS \quad (1.31)$$

$$= \rho \iint_S \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) U_n \right] dS \quad (1.32)$$

を得る. 境界面 S として, 物体表面 S_B , 自由表面 S_F , それに無限遠での境界面 S_C を考えよう. まず, 無限遠での S_C が止まっているとすると,

$$\left. \begin{array}{l} \text{on } S_C \quad U_n = 0 \\ \text{on } S_B \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_n = V_n \\ \text{on } S_F \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_n, \quad p = 0 \end{array} \right\} \quad (1.33)$$

であるから, (1.32) 式より

$$\frac{dE}{dt} = - \iint_{S_B} p V_n dS + \rho \iint_{S_C} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (1.34)$$

が得られる. ここで上式の一周期時間平均を考えてみよう. 法線の正方向は流体領域から外向きであることに注意すると右辺第1項は, 流体が物体になす仕事の符号反対, すなわち, 作用反作用の法則によって, 物体が流体に対してなす仕事に等しい. しかし, 物体が外部駆動装置などで強制的に動かされない限りは流体に対して仕事をしないから, 右辺第1項はゼロである. 考えている流体領域内の全体のエネルギー変化率 dE/dt も時間平均をとればゼロである. すなわち左辺もゼロとなる. したがってエネルギー保存の原理は次のように表すことができる.

$$\overline{\iint_{S_C} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS} = 0 \quad (1.35)$$

ただし記号の上の bar はその量の一周期時間平均を取ることを意味する.

一方, 物体が強制的に動かされている場合は, 既述のように, 右辺第1項は流体に対してなす仕事に等しいのでこれを W_D と表すことにすると, エネルギー保存の原理は,

$$W_D \equiv - \overline{\iint_{S_B} p V_n dS} = - \overline{\rho \iint_{S_C} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS} \quad (1.36)$$

と書くことができる. この式は物体に働く造波減衰力を求める際に有用である.

1.5 運動量保存の原理

水波の問題では流体の粘性を無視することが多いので、エネルギー保存の原理は、ここで述べる運動量保存の原理と全く同じ結果を与えることができる。しかし運動量の時間変化は流体力と直接関係があるので、運動量保存則を考えておくことは有用である。

さて、運動量は成分を持つので i 方向成分を M_i として考えると

$$\begin{aligned}\frac{dM_i}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_V \rho u_i dV \\ &= \rho \iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial t} dV + \rho \iint_S u_i U_n dS\end{aligned}\quad (1.37)$$

ここで (1.12) 式より

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} - gz \right) - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \text{更に} \quad u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &\equiv u_j \partial_j u_i = \partial_j (u_j u_i) - u_i \partial_j u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i)\end{aligned}\right\} \quad (1.38)$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{dM_i}{dt} &= -\rho \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} - gz \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) \right] dV + \rho \iint_S u_i U_n dS \\ &= -\rho \iint_S \left[\left(\frac{p}{\rho} - gz \right) n_i + u_i (u_n - U_n) \right] dS\end{aligned}\quad (1.39)$$

を得ることができる。上式で水平成分 ($i = 1, 2$) を考える際には $-gz$ の項は必要ない。これは体積積分で考えれば明らかである。

さて、(1.39) 式で流体を取り囲む境界面 S として、前節同様 $S = S_B + S_F + S_C$ を考えると、そこでの条件は

$$\left. \begin{aligned}\text{on } S_C \quad U_n &= 0 \\ \text{on } S_B \quad u_n &= V_n = U_n \\ \text{on } S_F \quad u_n &= U_n, \quad p = 0\end{aligned}\right\} \quad (1.40)$$

したがって (1.39) 式は

$$\frac{dM_i}{dt} = - \iint_{S_B} p n_i dS - \iint_{S_C} [p n_i + \rho u_i u_n] dS \quad (1.41)$$

となる。この一周期時間平均を考えよう。流体領域全体で考えれば、運動量の時間変化の平均はゼロである。また右辺第 1 項は、法線が流体から見て外向きを正として式変形していることに注意すれば、流体から物体が受ける力の符号反対である。したがって次の関係式を得ることができる。

$$\overline{\frac{dM_i}{dt}} = 0 = -\overline{F_i} - \overline{\iint_{S_C} [p n_i + \rho u_i u_n] dS} \quad (1.42)$$

この式は波によって物体に働く時間平均の定常漂流力（前進速度がある場合は、一般に抵抗増加と言う）を求める際に用いられる。

(1.36) 式、(1.42) 式は結局、無限遠での検査境界面における積分だけとなっている。物体の近傍における流場は一般に複雑であるが、無限遠では進行波成分だけが残るので、無限遠での積分の方が簡単となる場合が多い。これがエネルギー保存、運動量保存の原理を適用するメリットである。

1.6 二次元進行波

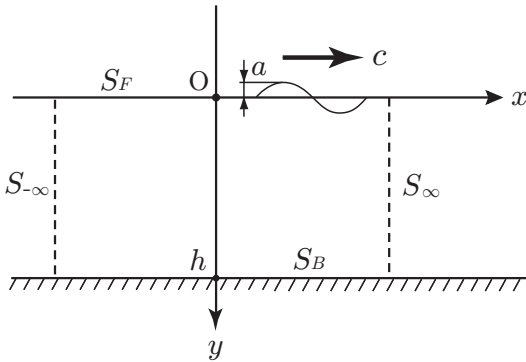


Fig.1.1 二次元進行波

この節では水波の理論としてもっとも基本的な二次元進行波について調べることにする。

図のような座標系で考える．静止水面を $y = 0$ とし，波の進行方向を x 軸の正方向とする．水深は一定で h と表す．

進行波の振幅を a ，円周波数を ω とすれば，水面波形が次式で表される．

$$y = \eta(x, t) = a \cos(\omega t - k_0 x) \quad (1.43)$$

ここで k_0 は波数 (wavenumber) と呼ばれるもので，進行波の波長を λ とすれば $k_0 = 2\pi/\lambda$ で与えられる．

(1.43) 式は x 軸の正方向へ進行する波を表していることに注意しよう．すなわち，位相関数形が $\omega t - k_0 x$ となっている．このマイナス符号の意味を理解するために，微小時間後 $t + \Delta t$ を考える．このとき， x 軸方向に進行するので $x + \Delta x$ で同じ波形となっているはずである．したがって，

$$\omega t - k_0 x = \omega(t + \Delta t) - k_0(x + \Delta x)$$

すなわち

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_0} \equiv c > 0 \quad (1.44)$$

となり，進行速度が正となっていることがわかる．(1.44) 式で与えられる速度を位相速度 (phase velocity) と言う．全く同じ理屈によって， x 軸の負方向に進行する波の位相関数は $\omega t + k_0 x$ となる．

もう少し一般化して言えば，(1.44) 式の位相速度 c で，形を変えないで x 軸の正方向に伝播する物理量 f は， $\omega t - k_0 x$ を 1 つの変数として $f(\omega t - k_0 x)$ と表され，このとき，この f は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1.45)$$

を満たしている．

次に，二次元進行波を表す速度ポテンシャルを求めてみよう．これまでの議論から明らかなように，支配方程式は二次元ラプラスの式 $[L]$ であり，流体領域を取り囲む境界面として，自由表面 S_F ，水底 S_B ，ならびに $x \rightarrow \pm\infty$ での仮想境界 $S_{\pm\infty}$ を考えて，そこでの境界条件式を与えればよい．

$$\text{連続の式 } [L] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{for } y \geq 0 \quad (1.46)$$

$$\text{自由表面条件 } [F] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = 0 \quad (1.47)$$

$$\text{水底条件 } [B] \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = h \quad (1.48)$$

$$\text{放射条件 } [R] \quad \text{at } x = \pm\infty \quad (1.49)$$

ここで， $S_{\pm\infty}$ での境界条件 $[R]$ (これは一般に，radiation 条件と呼ばれる) については明確な形で書かれていないが，ここは仮想面であるから，物理的にもっともらしい解を与えるような条件ということにしておこう．今の問題では， x 軸の正方向に波が伝播していくということがその条件となる．これは既に説明したように，位相関数が $f(\omega t - k_0 x)$ の形となっていれば満足される．

さて，ラプラスの式を解く方法は種々考えられるが，ここでは変数分離法で考えてみよう．上述の [R] の条件を考慮して，速度ポテンシャルを次の形に仮定する．

$$\Phi(x, y, t) = Y(y) \sin(\omega t - k_0 x) \quad (1.50)$$

これを (1.46) 式に代入すると， $Y(y)$ に関する微分方程式が

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - k_0^2 Y = 0 \quad (1.51)$$

となり，一般解は

$$Y(y) = C_1 e^{k_0 y} + C_2 e^{-k_0 y} \quad (1.52)$$

である．未定係数を決定するために，自由表面条件 [F] と水底条件 [B] に代入すると次式が得られる．

$$\left. \begin{aligned} C_1(\omega^2 + gk_0) + C_2(\omega^2 - gk_0) &= 0 \\ C_1 e^{k_0 h} - C_2 e^{-k_0 h} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

ここで， $C_1 = C_2 = 0$ 以外の解を持つためには

$$\begin{vmatrix} \omega^2 + gk_0 & \omega^2 - gk_0 \\ e^{k_0 h} & -e^{-k_0 h} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.54)$$

すなわち

$$\frac{\omega^2}{g} \equiv K = k_0 \tanh k_0 h \quad (1.55)$$

が条件となる．これは， k_0 と ω ， g の間に成り立つべき関係式を与える固有方程式である．このときの固有解は

$$C_1 e^{k_0 h} = C_2 e^{-k_0 h} \equiv \frac{1}{2} D \quad (1.56)$$

とおけば，未知数を 1 個含んだ形として次のように与えられる．

$$\Phi(x, y, t) = D \cosh k_0(y - h) \sin(\omega t - k_0 x) \quad (1.57)$$

[F]，[B] とともに同次の境界条件式であるから D は未知数のままである．これを決定するために自由表面上の波形を求めてみよう．これは線形理論では，(1.21) 式で計算できるので

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{y=0} = D \frac{\omega}{g} \cosh k_0 h \cos(\omega t - k_0 x) \\ &= a \cos(\omega t - k_0 x) \end{aligned} \quad (1.58)$$

したがって

$$D = \frac{ga}{\omega \cosh k_0 h} \quad (1.59)$$

と決定することができた．これを (1.57) 式に代入すると，結局， x 軸の正方向へ伝播する正弦進行波の速度ポテンシャルは次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \frac{ga}{\omega} \frac{\cosh k_0(y - h)}{\cosh k_0 h} \sin(\omega t - k_0 x) \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{ga}{i\omega} \frac{\cosh k_0(y - h)}{\cosh k_0 h} e^{i(\omega t - k_0 x)} \right] \end{aligned} \quad (1.60)$$

これを次のように表す．

$$\Phi(x, y, t) = \operatorname{Re} \left[\phi(x, y) e^{i\omega t} \right] \quad (1.61)$$

$$\phi(x, y) = \frac{ga}{i\omega} \frac{\cosh k_0(y - h)}{\cosh k_0 h} e^{-ik_0 x} \quad (1.62)$$

以下の説明では (1.61) 式のように，時間項を $e^{i\omega t}$ と表し，最終的には実数部分をとることを約束して，複素数で表された速度ポテンシャル $\phi(x, y)$ だけについて考えることにする．時間項が $e^{i\omega t}$ であるから x 軸の正方向に進む速度ポテンシャルは e^{-ik_0x} の項を有することに注意しよう（勿論， x 軸の負方向に進む波の場合には e^{+ik_0x} の項となる．）

ところで (1.55) 式の意味についてもう少し考えてみよう．(1.44) 式と (1.55) 式から位相速度 c は次式で与えられる．

$$c = \frac{\omega}{k_0} = \sqrt{\frac{g}{k_0} \tanh k_0 h} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad (1.63)$$

すなわち，自由表面条件は重力加速度 g ，波数 k_0 （または波長 λ ），円周波数 ω の間に一定の関係を作り立たせるものであることがわかる．(1.63) 式から，位相速度 c が波長とともに変化することもわかる．一般に任意波形の波は，無数の異なった波長の正弦波の線形重ね合わせから成ると考えられるので，(1.63) 式より，無数の正弦波から構成される波形は時々刻々に変化することになる．このことを波の分散といい，波長と位相速度の関係を表した (1.63) 式，あるいは (1.55) 式を分散関係 (dispersion relation) という．

水深が無限大の場合 ($h \rightarrow \infty$)，及び浅い場合 ($h \rightarrow 0$) の極限を考えると，(1.63) 式より

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (h \rightarrow \infty) \quad (1.64)$$

$$c = \sqrt{gh} \quad (h \rightarrow 0) \quad (1.65)$$

となる．したがって浅水波（または長波）の場合には位相速度は波長に関係なくなるので，波は非分散的である．(1.64) 式の深水波（または短波）で近似できるのは $\tanh k_0 h \sim 1$ であるが，これは $k_0 h = 2\pi h/\lambda \geq 2.65$ ，すなわち $\lambda \leq 2.4h$ で，1.0 % 以内の誤差で成り立っている．すなわち，実際的には水深が波長の半分以上あれば，水深無限大として取り扱っても大きな誤差を生じないことになる．

このことから海洋工学では，水深を無限大として考えることが多いので，その場合の式を以下にまとめておこう．

$$k_0 = K = \frac{\omega^2}{g}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} \simeq 0.8\sqrt{\lambda} \quad (1.66)$$

$$\phi(x, y) = \frac{ga}{i\omega} e^{-Ky - iKx} \quad (1.67)$$

1.7 群速度

前節の説明で，単一の円周波数 ω ，波数 k_0 を有する波は (1.63) 式で与えられる位相速度で伝播することがわかったが，次に ω ， k_0 とともに少しだけ異なる波の“群”について考えてみよう．すなわち $\delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ， $\delta k = k_2 - k_1$ として

$$\begin{aligned} \eta &= \text{Re} \left[A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} \right] \\ &= \text{Re} \left[A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} \left\{ 1 + \frac{A_2}{A_1} e^{i(\delta\omega t - \delta k x)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.68)$$

(1.68) 式の $\{ \quad \}$ は振幅変調を表す項であり， $\delta\omega$ ， δk とともに小さいのでゆっくり変化する．この項が波の群（長さ $2\pi/\delta k$ の波群）を表すが，その進行速度，すなわち群速度 (group velocity) は (1.44) 式と同様の考え方によって次式で与えられる．

$$c_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} \quad (1.69)$$

ここで $\delta\omega \rightarrow 0$ ， $\delta k \rightarrow 0$ の極限を考えるが， $\delta\omega t$ 及び $\delta k x$ が有限となるほどに t ， x が大きいと考えられると (1.68) 式の振幅変調は存続することになり，そのような場合には群速度 c_g は次のような有限の極

限値を有する .

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_0} = \frac{d}{dk_0}(k_0 c) = c + k_0 \frac{dc}{dk_0} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (1.70)$$

(1.55) 式を用いて具体的に計算してみよう . (1.55) 式の数微分によって

$$\frac{2}{\omega} \frac{d\omega}{dk_0} = \frac{1}{k_0} + \frac{2h}{\sinh 2k_0 h}$$

したがって ,

$$c_g = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega}{k_0} + \frac{\omega}{k_0} \frac{2k_0 h}{\sinh 2k_0 h} \right] = \frac{c}{2} \left[1 + \frac{2k_0 h}{\sinh 2k_0 h} \right] \quad (1.71)$$

となる . 上式で深水波 ($h \rightarrow \infty$) と浅水波 ($h \rightarrow 0$) の極限について考えると ,

$$c_g = \frac{c}{2} \quad (h \rightarrow \infty) \quad (1.72)$$

$$c_g = c \quad (h \rightarrow 0) \quad (1.73)$$

となることがわかる . すなわち深水波では群速度は位相速度の半分であり , 非分散である浅水波では群速度は位相速度に等しい .

1.8 波のエネルギーとその伝播速度

これまでに考えてきた 2 次元正弦進行波の持つエネルギーについて計算しておこう . エネルギーは運動エネルギーと位置エネルギーの和で与えられ , その計算式は既に (1.27) 式で与えている . 2 次元波を考えるので流体領域 V として $y = 0$ の自由表面上の面積が 1 であるような柱状体を考え , そのでのエネルギーの一周期時間平均を考えると ,

$$\bar{E} \equiv \frac{1}{T} \int_0^T E dt = \rho \int_{\eta}^h \overline{\left[\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - g y \right]} dy \quad (1.74)$$

ここで

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{y=0} \quad (1.75)$$

と表すことができる . (1.74) 式の計算で $\eta = O(\Phi)$ であることに注意し , Φ の 3 次以上の項は高次として省略する . 更に $\int_0^h g y dy$ の項は波動には関係なく存在するので , 波のエネルギーという場合には除外して考える . このとき (1.74) 式は

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho \int_0^h \overline{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]} dy - \rho g \int_{\eta}^0 y dy \quad (1.76)$$

となる . ここで時間項が (1.61) 式で表されるように $e^{i\omega t}$ である関数の積の時間平均の計算に関して次の公式を用いると便利である .

$$\overline{\text{Re}[A e^{i\omega t}] \text{Re}[B e^{i\omega t}]} = \frac{1}{4} (AB^* + A^*B) = \frac{1}{2} \text{Re}[AB^*] \quad (1.77)$$

(証明)

$$\text{Re}[A e^{i\omega t}] = \frac{1}{2} (A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t})$$

$$\text{Re}[B e^{i\omega t}] = \frac{1}{2} (B e^{i\omega t} + B^* e^{-i\omega t})$$

したがって

$$\text{Re}[A e^{i\omega t}] \text{Re}[B e^{i\omega t}] = \frac{1}{4} \{ AB^* + A^*B + AB e^{i2\omega t} + A^*B^* e^{-i2\omega t} \}$$

この時間平均をとると

$$\overline{\operatorname{Re}[A e^{i\omega t}] \operatorname{Re}[B e^{i\omega t}]} = \frac{1}{4} (AB^* + A^*B) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[AB^*]$$

であるから (1.77) 式が成り立っている．ただし， A^* ， B^* はそれぞれ A ， B の複素共役を表している． (証明終)

さて，(1.76) 式に (1.77) 式を適用する．このとき速度ポテンシャルが (1.61)，(1.62) 式のように表されているとすると，

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \frac{1}{4} \rho \operatorname{Re} \int_0^h \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right\} dy + \frac{1}{4} \rho g \operatorname{Re}[\eta \eta^*] \\ &= \frac{1}{4} \rho \left(\frac{ga}{\omega} k_0 \right)^2 \frac{1}{\cosh^2 k_0 h} \int_0^h \cosh 2k_0(y-h) dy + \frac{1}{4} \rho g a^2 \\ &= \frac{1}{4} \rho g a^2 + \frac{1}{4} \rho g a^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho g a^2 \end{aligned} \quad (1.78)$$

となることがわかる．すなわち，運動エネルギーと位置エネルギーは等しく，それぞれ $\frac{1}{4} \rho g a^2$ であり，これらは水深には関係ないことに注意しよう．

次にエネルギーの時間変化率を考えてみる．この計算式は既に (1.34) 式で与えられているが，流体内に物体は存在しないので (1.34) 式の右辺第 2 項だけとなる．すなわち，エネルギーの変化は，静止水面に垂直な検査面だけを通して起こることがわかる．エネルギーの計算と同様に， x 軸方向に単位長さの流体領域を考えると，

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_{\eta}^h \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy = \rho \int_0^h \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy + O(\Phi^3) \quad (1.79)$$

この時間平均を考えると (1.77) 式の公式によって

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dE}{dt}} &= \frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \int_0^h (i\omega \phi) \frac{\partial \phi^*}{\partial x} dy \\ &= -\frac{1}{2} \rho (ga)^2 \frac{k_0}{\omega} \frac{1}{\cosh^2 k_0 h} \int_0^h \frac{1 + \cosh 2k_0(y-h)}{2} dy \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\rho g a^2}{\omega} \frac{g k_0}{\cosh^2 k_0 h} \frac{2k_0 h + \sinh 2k_0 h}{4k_0} \\ &= -\frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{\omega}{k_0} \left\{ 1 + \frac{2k_0 h}{\sinh 2k_0 h} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \rho g a^2 c_g \end{aligned} \quad (1.80)$$

と計算できる．ただし，分散関係 (1.55) 式，群速度を与える (1.71) 式を用いて変形した．上式は， x 軸方向に単位長さの流体領域に対して得られたものであり，マイナス符号は，考えている流体領域からの流出量を表している．エネルギーの時間平均は (1.78) 式であることから，(1.80) 式は次のように表すこともできる．

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + c_g \frac{\partial \overline{E}}{\partial x} = 0 \quad (1.81)$$

すなわち，(1.45) 式からも明らかのように，波の全エネルギーは群速度で x 軸の正方向へ伝播されることがわかる．これが造波問題を考える際に群速度が重要となるもう一つの理由である．

第 2 章 グリーン関数

物体の存在による攪乱流場を表す速度ポテンシャルを，グリーンの公式によって境界積分方程式の形で記述する場合，重要な役割をするのがグリーン関数と言われる核関数である．これは流体力学的には単位強さの周期的わき出しによる速度ポテンシャルであるが，初めにこの具体的な式について調べておこう．

2.1 周期的わき出しによる速度ポテンシャル

すでに 2 次元進行波の速度ポテンシャルが (1.61), (1.62) 式で与えられることを知ったが，これは攪乱源からずっと遠方での状態と考えることができる．すなわち， x 軸の正方向に進む波の場合には x 軸の負方向遠方に攪乱源があると考えべきで，攪乱源の近くでは，局所的にのみ存在する波を含むもっと複雑な流れ場となっていることが想像できるが，ここではその具体的な式の導出を行う．

攪乱源として単位強さの周期的わき出しを考え，簡単のため水深無限大の 2 次元問題について考える．有限水深の場合は式が若干複雑となるが，考え方は同じである．まず時間項を分離し，速度ポテンシャルを次のように表す．

$$\Phi(x, y, t) = \text{Re}[G(x, y) e^{i\omega t}] \quad (2.1)$$

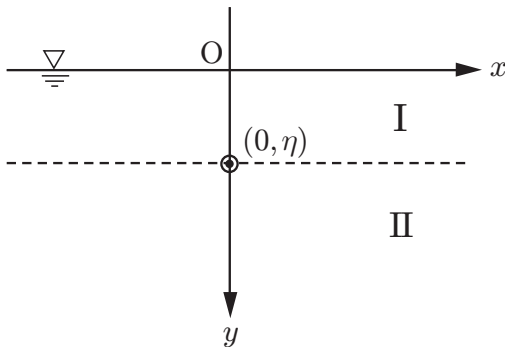


Fig. 2.1 解析領域と座標系

わき出しは Fig. 2.1 の座標系で $(0, \eta)$ のところにあるとする． x 軸方向の位置が $x = \xi$ である場合には y 軸を平行移動すればよいので一般性は失われない．また，わき出しであるので，流場は左右対称となることに注意しよう．このことから以下では $x > 0$ として考え，最終結果は x の代わりに $|x|$ ，あるいはもっと一般的に $|x - \xi|$ とすればよい．

さて，(2.1) 式の複素振幅部分 $G(x, y)$ に関する条件式をまとめると，

$$[L] \quad \nabla^2 G = \delta(x) \delta(y - \eta) \quad (2.2)$$

$$[F] \quad \frac{\partial G}{\partial y} + KG = 0 \quad \text{on } y = 0; \quad K = \frac{\omega^2}{g} \quad (2.3)$$

$$[B] \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad \text{as } y \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

$$[R] \quad \text{波は外方へ伝播すること} \quad (2.5)$$

である．ここで二，三の注意をしておこう．まず (2.2) 式の右辺はゼロではない．ラプラスの式は，(1.13) 式の導出で示したように，連続の式，すなわち質量保存則を表したものであった．しかしわき出しがある点を含む領域で考えれば，質量保存則はわき出し点からの流量を考慮したものでなければならない．(2.2) 式の場合，わき出し点を含む領域を S とし，その境界面を C と表すと，わき出し量は，

$$\begin{aligned} Q &= \int_C \frac{\partial G}{\partial n} ds = \int_C \mathbf{n} \cdot \nabla G ds = \iint_S \nabla^2 G dS \\ &= \iint_S \delta(x) \delta(y - \eta) dS = 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

である ($Q = 1$ となるように (2.2) 式の右辺の係数を決めている . すなわち単位強さである .)

また放射条件 (radiation condition $[R]$) は , 式で表さず , ここでは波が外方へ伝播するという物理的な条件としている . しかし , 時間項が (2.1) 式のように $e^{i\omega t}$ であるから , 2次元進行波の速度ポテンシャルで説明したように , $x \rightarrow \infty$ で $A e^{-iKx}$ の形となっていればよい (より厳密には $|x| \rightarrow \infty$ で $A e^{-iK|x|}$ の形であれば $[R]$ の条件は満足される .)

(2.2) ~ (2.5) 式の解を求める方法にはいろいろ考えられるが , ここではフーリエ変換法によって求めてみよう . フーリエ変換の定義は

$$\left. \begin{aligned} G^*(k; y) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) e^{-ikx} dx \\ G(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(k; y) e^{ikx} dk \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

とする . この時

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = 1 \quad (2.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{-ikx} dx = ik f^*(k) \quad (2.9)$$

などの関係によって , $G(x, y)$ のフーリエ変換 $G^*(k; y)$ が満たすべき条件式は (2.2) ~ (2.4) 式より

$$\frac{d^2 G^*}{dy^2} - k^2 G^* = \delta(y - \eta) \quad (2.10)$$

$$\frac{dG^*}{dy} + KG^* = 0 \quad \text{on } y = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{dG^*}{dy} = 0 \quad \text{as } y \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

のように y に関する常微分方程式となることがわかる . この解法であるが , 次の手順で行う .

- 1) y の領域を Fig. 2.1 のように , $y = \eta$ を境として2つの領域に分け , それぞれを I, II とする . I の領域で成立する解を G_1^* , II の領域で成立する解を G_2^* と表す .
- 2) G_1^* , G_2^* はそれぞれ $y = \eta$ を含まないので , デルタ関数の性質によって (2.10) 式の右辺がゼロとなった同次の2階線形微分方程式を満足する . したがって , この解はそれぞれ未定係数を2個含んだ一般解として容易に求められる .
- 3) G_1^* は $y = 0$ で (2.11) 式を満たし , G_2^* は $y \rightarrow \infty$ で (2.12) 式を満足するようにする . これによって , G_1^* , G_2^* はそれぞれ1個の未定係数を含んだ形で与えられる .
- 4) したがって条件式があと2個必要であるが , これは $y = \eta$ での G_1^* と G_2^* のマッチング条件で与えられる . それを理解するために , (2.10) 式を y について $y = \eta$ を含む微小範囲で積分すると

$$\left[\frac{dG^*}{dy} \right]_{\eta-\epsilon}^{\eta+\epsilon} - k^2 \int_{\eta-\epsilon}^{\eta+\epsilon} G^* dy = \int_{\eta-\epsilon}^{\eta+\epsilon} \delta(y - \eta) dy = 1 \quad (2.13)$$

となるが , これが満足されるためには ,

$$G_2^*(\eta) = G_1^*(\eta) \quad (2.14)$$

$$\left. \frac{dG_2^*}{dy} \right|_{y=\eta} - \left. \frac{dG_1^*}{dy} \right|_{y=\eta} = 1 \quad (2.15)$$

で与えられる2つの条件式が必要である .

以上によって G_1^*, G_2^* は完全に決定でき, したがって全範囲で成り立つ $G^*(k; y)$ を求めることができる. それを (2.7) 式の定義に従ってフーリエ逆変換すれば周期的わき出しによる速度ポテンシャル, すなわちグリーン関数を得ることができる.

ここでグリーン関数 (Green function) とは, (2.3)~(2.5) 式のような同次の境界条件式を満たし (したがって (1.18) 式のような非同次の物体表面境界条件式は含まない), かつ流場内のある一点 (ここでは $(0, \eta)$ の点) で (2.2) 式のような特異性を有する関数のことを呼ぶことにする.

さて, 上述の手順によって具体的にグリーン関数を求めてみよう. まず (2.10) 式の同次解は,

$$G^*(k; y) = C_1 e^{|k|y} + C_2 e^{-|k|y} \quad (2.16)$$

である. そこで (2.11) 式を満たす G_1^* , (2.12) 式を満たす G_2^* を求めると次のようになる.

$$G_1^*(k; y) = C \left\{ e^{|k|y} - e^{-|k|y} + \frac{2|k|}{|k| - K} e^{-|k|y} \right\} \quad (2.17)$$

$$G_2^*(k; y) = D e^{-|k|y} \quad (2.18)$$

C, D は未定係数であるが, それは (2.14), (2.15) 式の条件によって決定することができる. それらを上式に代入すると, $G_1^*(k; y), G_2^*(k; y)$ は次のように統一して表すことができる.

$$G^*(k; y) = -\frac{1}{2|k|} \left\{ e^{-|k||y-\eta|} - e^{-|k|(y+\eta)} \right\} - \frac{e^{-|k|(y+\eta)}}{|k| - K} \quad (2.19)$$

したがって, フーリエ逆変換 (2.7) 式によって

$$\begin{aligned} G(x, y; 0, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(k; y) e^{ikx} dk \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-k|y-\eta|} - e^{-k(y+\eta)} \right\} \frac{\cos kx}{k} dk - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+\eta)} \cos kx}{k - K} dk \end{aligned} \quad (2.20)$$

となるが, (2.20) 式の右辺第 1 項は解析的に積分できて (付録参照)

$$-\int_0^{\infty} \left\{ e^{-k|y-\eta|} - e^{-k(y+\eta)} \right\} \frac{\cos kx}{k} dk = \log \frac{r}{r_1} \quad (2.21)$$

ただし

$$\left. \begin{array}{l} r \\ r_1 \end{array} \right\} = \sqrt{x^2 + (y \mp \eta)^2}$$

となる. したがってグリーン関数は次のようになることがわかる.

$$G(x, y; 0, \eta) = \frac{1}{2\pi} (\log r - \log r_1) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+\eta)} \cos kx}{k - K} dk \quad (2.22)$$

この式の右辺第 1 項, すなわち $\frac{1}{2\pi} \log r$ の項は流体力学では無限流体中でのわき出しによる速度ポテンシャルである. したがってこの項が (2.2) 式の右辺の特異性を表しており, 偏微分方程式論ではこの項を基本解という. それ以外の項は自由表面条件を満たすために必要な付加項 (修正項) である.

(2.21) 式の積分項は $k = K$ で特異性のある, いわゆる特異積分であるが, この数学的な取り扱い方の違いによって放射条件 $[R]$ がどのように満足されるのかについて述べることにしよう. 特異積分の処理方法として数学的には以下の 3 通りが可能で, どれも正しいと言える.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k - K} dk = \begin{cases} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k - (K - i\mu)} dk \equiv I_1 \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k - (K + i\mu)} dk \equiv I_2 \\ \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \equiv I_3 \end{cases} \quad (2.23)$$

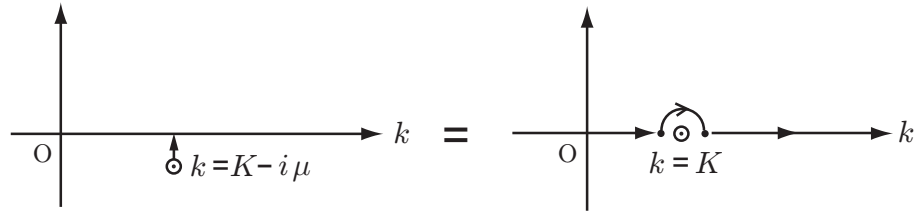


Fig. 2.2 特異積分の考え方

数学的にはどれも正しいが、得られる結果は物理的には異なる意味を持つ。その中で波が外方に伝播する、すなわち $|x| \rightarrow \infty$ で $Ae^{-iK|x|}$ の挙動を示す解が物理的にもっともらしいということになる。その選択が、放射条件 [R] を課したということになるのである。

まず (2.23) 式の I_1 について考えてみよう。最初に $\lim_{\mu \rightarrow 0}$ の操作に関して、Fig. 2.2 並びに留数の定理によって次の関係式が成り立つことに注意しよう。

$$I_1 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k - (K - i\mu)} dk = \oint_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k - K} dk - \pi i e^{-Ky} \cos Kx \quad (2.24)$$

上式の右辺第 1 項は Fig. 2.2 に示すように $k = K$ の近傍を除いて考える Cauchy の主値積分

$$L_C \equiv \oint_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k - K} dk = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{K-\varepsilon} + \int_{K+\varepsilon}^{\infty} \right\} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k - K} dk \quad (2.25)$$

である。さて、この主値積分を複素経路積分によって変形することを考えよう。まず

$$J \equiv \oint_C \frac{e^{-\zeta y + i\zeta x}}{\zeta - K} d\zeta \quad (2.26)$$

なる複素経路積分を考える。この複素積分の経路 C は無限遠方での計算が収束するように取らなければならない。それを調べるために $\zeta = R e^{i\theta}$ ($R \rightarrow \infty$) とおくと

$$e^{-\zeta y + i\zeta x} = e^{-R\{y \cos \theta + x \sin \theta\} - iR\{y \sin \theta - x \cos \theta\}} \quad (2.27)$$

であるから $x > 0$ の時には $0 \leq \theta \leq \pi/2$ となっている限り指数関数的に減衰することがわかる。そこで (2.26) 式の経路として、第 1 象限の $1/4$ 半円を考えてみよう (Fig. 2.3 を参照。) 勿論 $x < 0$ の時には $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ とする必要があるから、第 4 象限に複素積分経路を考えることになる。そのように場合分けして計算してみてもよいのだが、(2.25) 式で $x > 0$ として変形し、最後に x を $|x|$ と置き換えるだけで正しい結果が得られる。

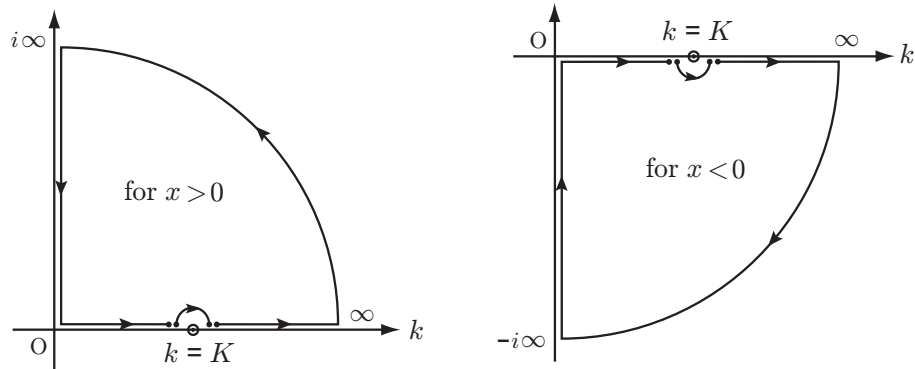


Fig. 2.3 複素積分経路

正しい積分経路が選ばれたならば，無限遠での寄与はないと考えてよいので，Cauchy の基本定理によって次の結果が得られる．

$$J = \oint_0^\infty \frac{e^{-ky+ikx}}{k-K} dk - \pi i e^{-Ky+iKx} + \int_\infty^0 \frac{e^{-iky-kx}}{ik-K} i dk = 0 \quad (2.28)$$

この実数部分を取ると

$$L_C = \int_0^\infty \frac{k \cos ky - K \sin ky}{k^2 + K^2} e^{-kx} dk - \pi e^{-Ky} \sin Kx \quad (2.29)$$

これを (2.24) 式の右辺第 1 項に代入して整理すると，最終的に次式が得られる．

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{k \cos ky - K \sin ky}{k^2 + K^2} e^{-k|x|} dk - \pi i e^{-Ky-iK|x|} \quad (2.30)$$

この式で $|x| \rightarrow \infty$ を考えるとわかるように，右辺第 1 項は減衰する項，すなわちわき出しの近くでのみ存在する，いわゆる local wave に対応しており，右辺第 2 項は外方へ伝播する進行波に対応する項である．したがって (2.23) 式における I_1 の特異積分の処理方法は放射条件 [R] を満足させるものであったことがわかる．

ここでは詳しい計算は省略するが，(2.23) 式の I_2 の方法，すなわち極点 $k = K$ を実軸の上方にずらす計算方法だと (2.30) とは反対に $e^{+iK|x|}$ の項が現れ，外方から内側へ入射してくる解となる．(2.23) 式の I_3 は I_1, I_2 の相加平均であるから進行波ではなく，定在波の解を与える．したがって I_2, I_3 の計算による解は数学的には正しくても，物理的な放射条件によって排除されることになる．

以上の結果をまとめると

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{r_1} - \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+\eta)} \cos k(x-\xi)}{k - (K - i\mu)} dk \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{r_1} - \frac{1}{\pi} \oint_0^\infty \frac{e^{-k(y+\eta)} \cos k(x-\xi)}{k - K} dk + i e^{-K(y+\eta)} \cos K(x-\xi) \quad (2.32)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{r_1} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{k \cos k(y+\eta) - K \sin k(y+\eta)}{k^2 + K^2} e^{-k|x-\xi|} dk + i e^{-K(y+\eta)-iK|x-\xi|} \quad (2.33)$$

と表すことができる．

以上の説明から想像できるように，放射条件 [R] を満足させるキーポイントは波数 K を実数ではなく，非常に小さな負の虚数部分を持つ複素数 ($K - i\mu, \mu > 0$) と考えることであった．この μ についてもう少し物理的な意味を考えてみよう．

まず最初にオイラー方程式 (1.2) 式まで立ち返り，実際には存在しないが，(1.2) 式の右辺に速度に比例する力が働いていると考えてみよう．この比例係数を μ とし，仮想の力であるので μ は非常に小さな値であるとする．この時 (1.2) 式中の $\rho g k$ は $\rho g k - \rho \mu u_i$ と修正させるべきである（速度に比例する摩擦力なのでマイナスが付けてある．）そしてベルヌーイの圧力式を求める手順を繰り返すと $u = \nabla \Phi$ であるから，(1.16) 式に対応する式は

$$p + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - \rho g z + \rho \mu \Phi = p_0 \quad (2.34)$$

となる．したがってこの式から自由表面条件式を考えてみると，(1.25) 式と同様にして

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (2.35)$$

となることがわかる．この式を 2 次元的に見なし (z を y と置き換える)，(2.1) 式を代入すると， $G(x, y)$ に関する自由表面条件式は次のように表すことができる．

$$\frac{\partial G}{\partial y} + (K - i\mu') G = 0 \quad \text{on } y = 0; \quad \mu' = \frac{\omega}{g} \mu > 0 \quad (2.36)$$

これは特異積分の計算方法として考えた I_1 の方法と全く等価であることがわかる。すなわち、オイラー方程式に仮想の摩擦力を導入して考えれば、放射条件 $[R]$ が自動的に満足され、特異積分に関連した不定性が生じないことがわかる。 μ の値は仮想のものであるから必要に応じてゼロとおけばよい。この仮想摩擦という考え方は Rayleigh によって提案されたので、 μ を Rayleigh の仮想摩擦係数と呼ぶ。2次元問題では放射条件が物理的にはっきりしているため正しい解を求めるのに問題ないが、より複雑な問題、例えば動揺しながら前進する3次元わき出しの場合などでは、物理的にどのような解が正しいのかを判断するのが容易でないこともあり得る。そのような時でも Rayleigh の仮想摩擦係数を導入しておきさえすれば、数学的変形のみで自動的に放射条件が満たされることになるだろう。

しかし、仮想の力を考えないと正しい解が得られないというのは受け入れ難い考え方もかもしれない。ここで取り扱っている問題は周期的動揺をしていて定常状態にあるから放射条件の既定が難しいとも言える。初期値問題として考えれば解に不定性が残らないだろうと想像するのが自然である。すなわち $t = -\infty$ に動揺が始まって定常状態に達したと考える。この考え方を簡単に実現する方法は、(2.1) 式を

$$\Phi(x, y, t) = \text{Re} \left[G(x, y) e^{i(\omega - i\varepsilon)t} \right] \quad (2.37)$$

のように、円周波数が微小な虚数部を持つ複素数と考えることである。これを線形自由表面条件式に代入すれば (2.36) 式と等価な式が得られる。すなわち、 $K = (\omega - i\varepsilon)^2/g \simeq \omega^2/g - i\mu$ であり、放射条件を正しく満たす解が自動的に得られることになる。もっとも (2.37) 式の考え方は放射条件の適用ではなく、初期条件の適用によって正しい解が得られると考えておくべきであろう。

2.2 グリーンの公式

ここではグリーン関数を用いて、任意形状の物体による攪乱速度ポテンシャルの表示式を与えるのが目的であるが、まず一般的に3次元問題について、基礎式となるグリーンの公式から話を始めよう。ガウスの発散定理

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = - \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS \quad (2.38)$$

において $\mathbf{A} = \phi \nabla G$ を代入する。ここで \mathbf{n} は法線ベクトルであるが、考えている流体領域 V の内向きを正として定義しているため (2.38) 式の左辺にマイナスを付けている。 ϕ は求めるべき速度ポテンシャルであり、 G は前節で説明したグリーン関数である。この時

$$\iiint_V (\nabla \phi \cdot \nabla G + \phi \nabla^2 G) dV = - \iint_S \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (2.39)$$

となる。次に ϕ と G を入れ替えて同様の式を作り、両者の差をとると次式を得ることができる。

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi) dV = - \iint_S \left\{ \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} dS \quad (2.40)$$

さて、速度ポテンシャル ϕ はラプラスの式を満足しているため $\nabla^2 \phi = 0$ であるが、グリーン関数は単位強さのわき出しであるから、わき出しのある点では $\nabla^2 G = 0$ とはならず、(2.2) 式で示した関係を3次元の場合へ拡張した次式であることに注意しよう。

$$\nabla^2 G = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \delta(z - \zeta) \quad (2.41)$$

これを (2.40) 式に代入するが、(2.40) 式の積分が副変数 (ξ, η, ζ) について行うものとする、直ちに次式を得ることができる。

$$\phi(P) = \iint_S \left\{ \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_Q} - \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \right\} G(P; Q) dS(Q) \quad (2.42)$$

ただし、 $P = (x, y, z)$ 、 $Q = (\xi, \eta, \zeta)$ である。

2次元問題に対しても全く同様の式を導くことができ次式となる。

$$\phi(P) = \int_S \left\{ \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_Q} - \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \right\} G(P; Q) ds(Q) \quad (2.43)$$

ただし，2次元の場合には $P = (x, y)$ ， $Q = (\xi, \eta)$ とする。

(2.42) 式，(2.43) 式での境界面は流体領域を取り囲む全てである。これらの式によれば，境界面上での $\partial \phi / \partial n$ ， ϕ の値から流場内の任意の点での速度ポテンシャルの値が求められることになるが，境界面上の $\partial \phi / \partial n$ ， ϕ の両方が既知であることは殆どない。通常は点 P を境界面上に近づけた極限を考えることによって，境界面上の速度ポテンシャルに関する積分方程式を作り，それを解くことになる。点 P が境界面上に近づいた極限ではデルタ関数の積分値が半分になる，言い換えればわき出しから流体領域内への流量が片側だけの半分となることに注意すればよい。(2.43) 式だと

$$\frac{1}{2} \phi(P) = \int_S \left\{ \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_Q} - \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \right\} G(P; Q) ds(Q) \quad (2.44)$$

となる。この式では P 点も物体表面上にあることに注意しよう。(2.43) 式の積分範囲についてもう少し詳しく調べてみることにする。

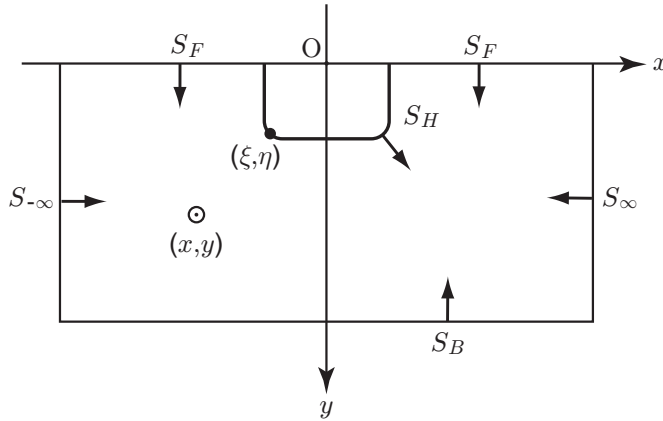


Fig. 2.4 座標系と記号

図に示すように，浮体表面 S_H ，自由表面 S_F ，水底 S_B ，及び自由表面と水底とを結ぶ無限遠での境界面 S_{∞} ， $S_{-\infty}$ で囲まれた流体領域を考える。法線 n は (2.38) 式で定義したように流体領域の内向きが正の方向である。

(2.43) 式のグリーン関数 $G(P; Q)$ は (2.3) ~ (2.5) 式に示したように，求めるべき速度ポテンシャルと同じ境界条件式を満足していることに注意しよう。但し，(2.43) 式は副変数についての演算であるので，ここでもう一度まとめておくと次のようである。

$$\left. \begin{aligned} [S_F] \quad & \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = -K\phi; \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \eta} = -KG \quad \text{on } \eta = 0 \\ [S_B] \quad & \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \quad \text{as } y \rightarrow \infty \\ [S_{\pm\infty}] \quad & \frac{\partial}{\partial n} = \mp \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \phi \sim A e^{-K\eta \mp iK\xi}; \quad G \sim B e^{-K\eta \mp iK\xi} \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

これらを (2.43) 式に代入してみると， S_F ， S_B ， $S_{\pm\infty}$ 上での積分はすべてゼロとなり，浮体表面 S_H 上での積分だけが残ることがわかるであろう。すなわち，グリーン関数を，求めるべき速度ポテンシャルが満足すべき同次の境界条件式を満足するように求めておけば，グリーンの公式によって，その境界面上での積分はすべてゼロとなり省くことができるのである。

一方浮体表面では，非定常運動の場合には (1.18) 式で示したように非同次の境界条件式となるし，境界面の形状も浮体ごとに異なる。したがって S_H 上の積分は一般的には残る。しかし (2.44) 式の境界面を浮体表面だけにできるということは，境界要素法等の数値計算において未知数の数を少なくすることができ，数値計算上非常にメリットがある。勿論その代償としてグリーン関数の数値計算を実行しなければならないが，それは最近のコンピュータをもってすれば十分な精度で可能であり，積分の境界面が多いということよりはるかに楽である。

以上で得られた結果を、特に2次元問題に対して整理しておこう。まず、流体領域内の任意の点 $P(x, y)$ における速度ポテンシャルは、物体表面上だけの積分

$$\phi(P) = \int_{S_H} \left\{ \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_Q} - \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \right\} G(P; Q) ds(Q) \quad (2.46)$$

によって計算することができる。

ここで法線速度 $\partial \phi / \partial n$ は、次章で示されるように、物体表面境界条件によって与えられるので既知である。一方、物体表面上での速度ポテンシャル $\phi(Q)$ は一般的には未定であるが、点 P が物体表面上にあるとしたときの関係式

$$\frac{1}{2} \phi(P) + \int_{S_H} \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P; Q) ds(Q) = \int_{S_H} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_Q} G(P; Q) ds(Q) \quad (2.47)$$

を(何らかの方法で)数値的に解くことによって決定することができる。

したがって手順としては、(2.47) 式を解いて物体表面上での速度ポテンシャル $\phi(Q)$ を決定し、(2.46) 式によって流体領域内の任意点での速度ポテンシャル $\phi(P)$ を求めるということになる。

2.3 Kochin 関数

(2.46) 式を用いると、速度ポテンシャルの無限遠での様子はグリーン関数の無限遠での挙動によって決まることになる。それは (2.33) 式から直ちに求められて

$$G(P; Q) \sim i e^{-K(y+\eta) \mp iK(x-\xi)} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty \quad (2.48)$$

である。これを (2.46) 式に代入すれば次式を得ることができる。

$$\phi(x, y) \sim i H^\pm(K) e^{-Ky \mp iKx} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty \quad (2.49)$$

ここで

$$H^\pm(K) = \int_{S_H} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\eta \pm iK\xi} ds(\xi, \eta) \quad (2.50)$$

この式から無限遠での波形を求めてみると、(1.21) 式によって

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta(x, t) \sim \text{Re} [\zeta(x) e^{i\omega t}] \\ \zeta(x) = \frac{i\omega}{g} \phi(x, 0) = -\frac{\omega}{g} H^\pm(K) e^{\mp iKx} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty \end{array} \right. \quad (2.51)$$

となることがわかる。

(2.50) 式で定義される関数をコチン関数 (Kochin function) といい、(2.51) 式から明らかなように、無限遠での進行波の振幅(に比例する量)に関係している。 $H^+(K)$ が $x \rightarrow +\infty$ での値、 $H^-(K)$ が $x \rightarrow -\infty$ での値であり、これらは一般に複素数である。どんな形状の物体でもその周期的攪乱によって造られる無限遠での波は (2.51) 式で示されるように外方へ伝わる正弦進行波であるが、その振幅、位相は物体形状や運動モードが変われば当然ながら変化するであろう。物体形状、運動モードによる違いが集約された形として Kochin 関数が与えられるのである。造波問題で Kochin 関数がどのように重要であるかについては次章において詳しく述べる予定である。

第3章 2次元造波理論

浮体の波浪中での動揺理論，消波・波吸収理論を理解するためには，浮体の強制動揺問題（radiation 問題），波の散乱問題（diffraction 問題），更には両者の間に成り立つ関係式を正しく理解することが必要である．ここではグリーンの公式を効果的に用いることにより，これらの解説を行う．

3.1 物体表面境界条件式

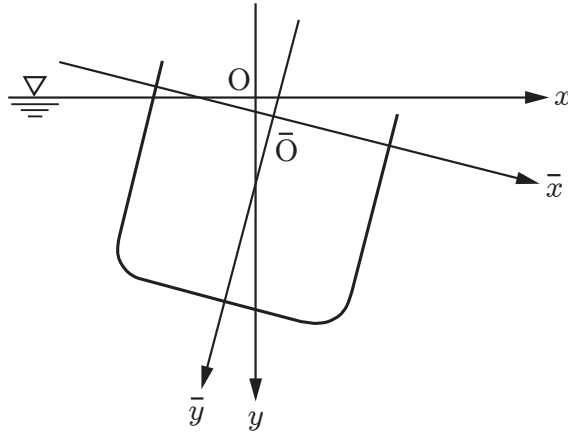


Fig.3.1 座標系

境界条件式の導出方法は既に 1.3 節で説明したように，境界面が関数形で与えられている時，その実質微分 = 0 の演算，すなわち運動学的条件を考えることによって境界条件式が与えられる．

しかし，実質微分は空間に固定した慣性座標系での計算であるから，物体が動揺する時のように時々刻々境界面を記述する座標系（これを物体固定座標と呼ぶ）が動く場合には，その影響を考慮しなければならない．

それにはまず空間固定座標系 $o-xy$ と物体固定座標系 $\bar{o}-\bar{x}\bar{y}$ との関係について知る必要がある．物体は o 点まわりに sway（左右揺），heave（上下揺），roll（横揺）を行うものとし，これらの振幅は微小であるとして，次のように表す．

$$\left. \begin{aligned} \text{sway} &: \operatorname{Re} [X e^{i\omega t}] \equiv \operatorname{Re} [X_1 e^{i\omega t}] \\ \text{heave} &: \operatorname{Re} [Y e^{i\omega t}] \equiv \operatorname{Re} [X_2 e^{i\omega t}] \\ \text{roll} &: \operatorname{Re} [\Theta e^{i\omega t}] \equiv \operatorname{Re} [X_3 e^{i\omega t}] \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

X, Y, Θ と $X_j (j = 1 \sim 3)$ は必要に応じて使い分けることとし，これらは，他に時間の基準が設けられている場合には，すべて位相差を含んだ複素振幅と考えるべきである．

さて， $\mathbf{r} = (x, y)$ と $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{x}, \bar{y})$ との関係は次のように表すことができる．

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{r}} &= \mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha} e^{i\omega t} \\ \boldsymbol{\alpha} &= i(X_1 - X_3 y) + j(X_2 + X_3 x) = i X_1 + j X_2 + \mathbf{k} X_3 \times \mathbf{r} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

また，物体表面形状は船体固定座標系で

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - f(\bar{x}) = 0 \quad (3.3)$$

と表せると考えよう．これらを用いて空間固定の座標系に関する実質微分の計算を行うが，それは次のように行うべきである．(1.17) 式より

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla F \\ &= \frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + \nabla \Phi \left[i \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right) + j \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

したがって

$$-i\omega\alpha e^{i\omega t} \cdot \nabla F + \nabla\phi e^{i\omega t} \left[\nabla F - i\frac{\partial\alpha}{\partial x} e^{i\omega t} \nabla F - j\frac{\partial\alpha}{\partial y} e^{i\omega t} \nabla F \right] = 0 \quad (3.4)$$

ここで ∇ は (\bar{x}, \bar{y}) に関する微分を表す。さて上式で α, ϕ を微小量と考える時の微小量に関する 1 次の項だけを考えることにしよう (変動項の振幅を微小量としているので, 言い換えれば, $e^{i\omega t}$ に比例する項だけを考える, すなわち線形化するということである。) この時, ∇ と ∇ の違いは (3.2) 式から明らかなように更に高次の項を生じせしめるだけであるから, (\bar{x}, \bar{y}) を以後 (x, y) で表すことにする。この時 (3.4) 式は

$$\nabla\phi \cdot \nabla F = i\omega\alpha \cdot \nabla F \quad (3.5)$$

となる。1.3 節で述べたように法線ベクトルは $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$ で与えられ ((3.3) 式で F を定義すると物体から外向きが法線の正方向となることに注意), したがって (3.5) 式は次のように表せる。

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = i\omega\alpha \cdot \mathbf{n} = i\omega \left\{ n_1(X_1 - X_3 y) + n_2(X_2 + X_3 x) \right\} \quad (3.6)$$

これを次のように表すことにしよう。

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \sum_{j=1}^3 i\omega X_j n_j \quad (3.7)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} n_1 = n_x = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad n_2 = n_y = \frac{\partial y}{\partial n} \\ n_3 = n_2 x - n_1 y = (\mathbf{r} \times \mathbf{n})_3 = \varepsilon_{3ij} x_i n_j \quad (x_1 = x, x_2 = y) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

物体の動揺は入射波の存在によって起こるのであり, その時に (3.7) 式のような線形の境界条件式が満たされるためには, 次のように速度ポテンシャルを分離して考えればよい。

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \equiv \frac{ga}{i\omega} (\varphi_0 + \varphi_4) + \sum_{j=1}^3 i\omega X_j \varphi_j \quad (3.9)$$

この時

$$\frac{\partial}{\partial n} (\varphi_0 + \varphi_4) = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi_j = n_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.11)$$

であれば (3.7) 式が満たされている。ここで ϕ_0 は入射波の速度ポテンシャルであり, 水深が無限大の時 x 軸の正方向に進む波の場合には (1.62) 式より,

$$\phi_0(x, y) = \frac{ga}{i\omega} e^{-Ky - iKx} \equiv \frac{ga}{i\omega} \varphi_0(x, y) \quad (3.12)$$

と表すことができる。

(3.10) 式より ϕ_4 は, 入射波によって誘起される法線方向の流速を打ち消し, 物体表面条件を満足させるための補正項である。これは物体の動揺には関係しない速度ポテンシャルであり, 物理的には, 物体が固定されている時, 入射波を散乱させることによって生ずる攪乱流場を表す。これを scattered ポテンシャルと呼び, $\phi_0 + \phi_4 \equiv \phi_d$ を diffraction ポテンシャルと呼ぶ。この散乱流場を考えることを diffraction 問題と言う (研究者によっては ϕ_4 を diffraction ポテンシャルと言うこともあるので違いに注意すること)

一方, $\phi_j = i\omega X_j \varphi_j$ は静止流体中で物体が j モードの運動 ($j = 1$ は sway, $j = 2$ は heave, $j = 3$ は roll) をする時の攪乱流場を表す速度ポテンシャルであり, radiation ポテンシャルと呼ぶ。この強制動揺による流場を考えることを radiation 問題と言う。線形理論であるので, 各運動モード別に考え, それらを加え合わせる事が許されるのである。

3.2 Kochin 関数，進行波の成分分離

実際には入射波が物体に当たり，その影響で物体が動揺するという複雑な現象が，線形理論のもとでは，radiation 問題と diffraction 問題に分けて考えることができ，さらに radiation 問題は運動モード別に考えることができることを知った．したがって物体によって造られる外方への進行波，言い換えれば Kochin 関数も成分分けすることができるはずである．その式をここで具体的に示しておこう．

速度ポテンシャル (3.9) 式のうち ϕ_0 以外の攪乱項を Kochin 関数の定義式 (2.50) に代入し，物体の攪乱による Kochin 関数を次のようにまとめる．

$$H^\pm(K) = \frac{ga}{i\omega} H_4^\pm(K) + i\omega \sum_{j=1}^3 X_j H_j^\pm(K) = \frac{ga}{i\omega} \left\{ H_4^\pm(K) - K \sum_{j=1}^3 \left(\frac{X_j}{a} \right) H_j^\pm(K) \right\} \quad (3.13)$$

したがって

$$\varphi_j(x, y) \sim i H_j^\pm(K) e^{-Ky \mp iKx} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty \quad (3.14)$$

ここで

$$H_j^\pm(K) = \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\eta \pm iK\xi} ds(\xi, \eta) \quad (j = 1 \sim 4) \quad (3.15)$$

となっている．無限遠での進行波の複素振幅も (2.51) 式に (3.13) 式を代入することによって

$$\begin{aligned} \zeta(x) &\sim -\frac{\omega}{g} \left\{ \frac{ga}{i\omega} H_4^\pm(K) + i\omega \sum_{j=1}^3 X_j H_j^\pm(K) \right\} e^{\mp iKx} \\ &= \left\{ ia H_4^\pm(K) - iK \sum_{j=1}^3 X_j H_j^\pm(K) \right\} e^{\mp iKx} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (3.16)$$

である．これを

$$\zeta(x, t) = \text{Re} \left[\zeta(x) e^{i\omega t} \right] \equiv \text{Re} \left[\sum_{j=1}^4 \zeta_j^\pm e^{i(\omega t \mp Kx)} \right] \quad (3.17)$$

ただし

$$\zeta_j^\pm = -iK X_j H_j^\pm(K) \quad j = 1 \sim 3: \text{ radiation wave} \quad (3.18)$$

$$\zeta_4^\pm = ia H_4^\pm(K) \quad \text{diffraction wave} \quad (3.19)$$

とまとめておくことにしよう．

ところで，入射波の存在が関係している diffraction 問題での Kochin 関数は (3.15) 式で $j = 4$ とすることで与えられるが，物体表面条件式 (3.10) を考慮することで別の形に表すこともできる．それを示すために，2.2 節で導いた速度ポテンシャルの表示式 (2.43) 式に立ち返って考え， ϕ として $\varphi_d = \varphi_0 + \varphi_4$ を代入する． $\varphi_d(Q)$ および $G(P; Q)$ は同じ自由表面条件 $[S_F]$ と水底条件 $[S_B]$ を満たすこと，物体表面上 $[S_H]$ では $\varphi_d(Q)$ は (3.10) 式を満たすこと， $\varphi_4(Q)$ は無限遠 $[S_{\pm\infty}]$ で波が外方へ伝播するという放射条件を満たすが， $\varphi_0(Q)$ はそうでないこと，などを考慮すると次式となる．

$$\begin{aligned} \varphi_0(P) + \varphi_4(P) &= - \int_{S_H} \left\{ \varphi_0(Q) + \varphi_4(Q) \right\} \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P; Q) ds(Q) \\ &\quad + \int_{S_{\pm\infty}} \left\{ \frac{\partial \varphi_0(Q)}{\partial n_Q} - \varphi_0(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \right\} G(P; Q) ds(Q) \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここで右辺第 2 項の積分は，(2.43) 式の ϕ として φ_0 を代入した式 (φ_0 と G に対してグリーンの公式を適用した式) を考えれば明らかのように， $\varphi_0(P)$ 自身に他ならない．したがって

$$\varphi_4(P) = - \int_{S_H} \left\{ \varphi_0(Q) + \varphi_4(Q) \right\} \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P; Q) ds(Q) \quad (3.21)$$

が得られる．この式にグリーン関数の漸近式 (2.48) 式を代入すればわかるように，diffraction 問題での Kochin 関数は次のように表すことも可能である．

$$H_4^\pm(K) = - \int_{S_H} \left(\varphi_0 + \varphi_4 \right) \frac{\partial}{\partial n} e^{-K\eta \pm iK\xi} ds(\xi, \eta) \quad (3.22)$$

さて，Kochin 関数 (3.15) 式は，

$$H_j^\pm(K) = \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\eta} \cos(K\xi) ds \pm i \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\eta} \sin(K\xi) ds \quad (3.23)$$

と表すことができる．速度ポテンシャル φ_j は一般に ξ の偶関数と奇関数の和で表されるが， φ_j が ξ の偶関数であれば第 2 項が， ξ の奇関数であれば第 1 項がそれぞれゼロとなる．速度ポテンシャルが ξ の偶関数であるということはそれによって表される流場が左右対称と言うことであり，反対に ξ の奇関数の時は，流場は左右反対称となっている．

ここで特に物体形状が左右対称であると仮定しよう．この時，heave による流場は明らかに左右対称であり，sway，roll による流場は左右反対称となっている．更に速度ポテンシャル φ_j は自由表面上に波を発生するために，一般的に複素数である ($\varphi_j = \varphi_{jc} + i\varphi_{js}$)．これらを考慮して次のように表す．

1) 左右対称物体の heave ($j = 2$)

$$H_2^\pm(K) = \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\eta} \cos(K\xi) ds = H_{2c}^\pm(K) + i H_{2s}^\pm(K) \quad (3.24)$$

2) 左右対称物体の sway ($j = 1$)，roll ($j = 3$)

$$H_j^\pm(K) = \pm i \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\eta} \sin(K\xi) ds = H_{jc}^\pm(K) + i H_{js}^\pm(K) \quad (3.25)$$

3) Diffraction ($j = 4$)

$$H_4^\pm(K) = C_4(K) \pm i S_4(K) \quad (3.26)$$

ここで

$$\left. \begin{array}{l} C_4(K) \\ S_4(K) \end{array} \right\} = \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} - \varphi_4 \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\eta} \left\{ \begin{array}{l} \cos(K\xi) \\ \sin(K\xi) \end{array} \right\} ds \quad (3.27)$$

(3.24)，(3.25) 式よりわかるように $H_2^+(K) = H_2^-(K)$ であり， $H_{2c}^\pm(K)$ ， $H_{2s}^\pm(K)$ は実数であるのに対して，sway，roll については $H_j^+(K) = -H_j^-(K)$ であり， $H_{jc}^\pm(K)$ ， $H_{js}^\pm(K)$ は純虚数である．一方，diffraction 問題の Kochin 関数は，左右対称な成分が $C_4(K)$ ，左右反対称な成分は $S_4(K)$ で表されており，radiation 問題に対比して言うならば， $C_4(K)$ が (3.24) 式， $\pm i S_4(K)$ が (3.25) 式に対応している．

ところで既に述べたように，Kochin 関数は進行波の複素振幅に関係している．そこで特に radiation 問題での Kochin 関数を強制動揺変位に対する進行波の係数と位相差で表すことが多いので，それらの関係をまとめておく．

	変位		進行波	
Sway	($j = 1$)	$\text{Re}[X e^{i\omega t}]$	$\text{Re}[X \bar{A}_S^\pm e^{i\varepsilon_S^\pm} e^{i(\omega t + Kx)}]$	} (3.28)
Heave	($j = 2$)	$\text{Re}[Y e^{i\omega t}]$	$\text{Re}[Y \bar{A}_H^\pm e^{i\varepsilon_H^\pm} e^{i(\omega t + Kx)}]$	
Roll	($j = 3$)	$\text{Re}[\Theta e^{i\omega t}]$	$\text{Re}[\Theta \ell \bar{A}_R^\pm e^{i\varepsilon_R^\pm} e^{i(\omega t + Kx)}]$	

この時，(3.18) 式と上式の定義を比べると明らかなように次の関係がある．

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_S^\pm e^{i\varepsilon_S^\pm} = -iKH_1^\pm(K) \\ \bar{A}_H^\pm e^{i\varepsilon_H^\pm} = -iKH_2^\pm(K) \\ \ell \bar{A}_R^\pm e^{i\varepsilon_R^\pm} = -iKH_3^\pm(K) \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

Roll の振幅比の定義に用いている ℓ は代表長さで，半幅あるいは吃水を用いることとする．物体形状が左右対称の場合を考えると，(3.24)，(3.25) 式で示したように $H_2^+ = H_2^-$ ， $H_j^+ = -H_j^-$ ($j = 1, \text{ or } 3$) であるから，進行波振幅比は左右で同じとなり，肩符の記号 \pm は必要なくなる．また位相差には

$$\varepsilon_S^+ = \varepsilon_S^- + \pi, \quad \varepsilon_H^+ = \varepsilon_H^-, \quad \varepsilon_R^+ = \varepsilon_R^- + \pi \quad (3.30)$$

の関係がある．したがって $H_j^+(K)$ を考えるだけならば肩符の記号は不必要であるから，以下の説明では省略する．

3.3 流体力の計算式

速度ポテンシャル φ_j ($j = 1 \sim 4$) をどのようにして求めるかということは重要なことであるが、ここでは速度ポテンシャルが既に求まったとして、先に流体力の計算方法について述べる。

流体力は圧力を物体の没水部分にわたって積分すれば求められるので、まず圧力の式を求めよう。線形理論で考えるので、ベルヌーイの圧力式 (1.16) で速度ポテンシャルの 2 乗以上の項を省略し、大気圧を基準とすると、

$$P(x, y, t) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho g y + O(\Phi^2) \quad (3.31)$$

となる。ここで右辺第 2 項は静水圧であるが、物体は動揺するので、(3.2) 式、すなわち $y = \bar{y} + (X_2 + X_3 x) e^{i\omega t}$ を代入し、姿勢変化に基づく変動分 ($e^{i\omega t}$ に比例する項) だけを考えることにする。この時、圧力式は次のようにまとめられる。

$$\left. \begin{aligned} P(x, y, t) &= \text{Re}[p(x, y) e^{i\omega t}] \\ p(x, y) &= p_s(x, y) + p_r(x, y) + p_d(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

ここで

$$p_s(x, y) = \rho g (X_2 + X_3 x) = \rho g (Y + \Theta x) \quad (3.33)$$

$$p_r(x, y) = -\rho i\omega \sum_{j=1}^3 i\omega X_j \varphi_j(x, y) \quad (3.34)$$

$$p_d(x, y) = -\rho i\omega \frac{ga}{i\omega} (\varphi_0 + \varphi_4) = -\rho ga (\varphi_0 + \varphi_4) \quad (3.35)$$

(3.33) 式は静水圧の変動部分、(3.34) 式は物体の動揺による radiation 問題での圧力、(3.35) 式は diffraction 問題での圧力である。

まず最初に radiation 問題での圧力積分について考える。法線を物体から流体に向いている場合が正と定義すれば、 i 方向に働く流体力は次式で与えられる。

$$F_i = - \int_{S_H} p_r(x, y) n_i ds = \rho (i\omega)^2 \sum_{j=1}^3 X_j \int_{S_H} \varphi_j(x, y) n_i ds \equiv \sum_{j=1}^3 f_{ij} \quad (3.36)$$

ここで

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \rho (i\omega)^2 X_j \int_{S_H} \{\varphi_{jc} + i\varphi_{js}\} n_i ds \\ &= -(i\omega)^2 X_j \underbrace{\left[-\rho \int_{S_H} \varphi_{jc} n_i ds \right]}_{A_{ij}} - i\omega X_j \underbrace{\left[\rho \int_{S_H} \varphi_{js} n_i ds \right]}_{B_{ij}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

すなわち、 f_{ij} は j モードの動揺によって i 方向に働く流体力の意味で、これは (時間項 $e^{i\omega t}$ が省略されていることを考えれば明らかのように) 加速度 $(i\omega)^2 X_j e^{i\omega t}$ に比例する付加質量 A_{ij} と速度 $i\omega X_j e^{i\omega t}$ に比例する減衰力係数 B_{ij} とで表すことができる。これらは運動方程式における右辺の外力項として考えているので、負の符号を付けて定義していることに注意しよう。また、これらは動揺変位 X_j に対する transfer function という意味で次のようにまとめることができる。

$$f_{ij} = T_{ij} X_j = -(i\omega)^2 \left\{ A_{ij} + \frac{1}{i\omega} B_{ij} \right\} X_j \quad (3.38)$$

$$T_{ij} = (i\omega)^2 \rho \int_{S_H} \varphi_j n_i ds = (i\omega)^2 \rho \int_{S_H} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds \quad (3.39)$$

次に diffraction 問題での流体力 (これを波浪強制力と呼ぶ) について考える。 i 方向に働く力 ($i = 3$ は勿論モーメント) は (3.35) 式により次式で与えられる。

$$E_i = - \int_{S_H} p_d(x, y) n_i ds = \rho g a \int_{S_H} \{ \varphi_0(x, y) + \varphi_4(x, y) \} n_i ds \quad (3.40)$$

上式のうち，入射波による圧力の積分，すなわち $\varphi_0(x, y)$ に関する積分の項は，理論研究の最初の項に考えられていた唯一の成分であり，その当時の研究者の名をとってフルード・クリロフ力 (Froude-Krylov force) と呼ばれる．

最後に，静水圧の変動分 $p_s(x, y)$ について考えよう．(3.33) 式を代入して具体的に計算してみる．線積分で考えても良いが，ガウスの定理を使う方が分かり易いであろう．

まず x 方向の力を形式的に求めてみると，

$$\begin{aligned} S_1 &= - \int_{S_H} p_s(x, y) n_1 ds = -\rho g \int_{S_H} (Y + \Theta x) n_1 ds \\ &= -\rho g \Theta \iint_V dS = -W \Theta \end{aligned} \quad (3.41)$$

である．しかし静水圧の積分として横方向に力が働くというのは何かおかしい．実は (3.41) 式は，船体固定座標での x 軸方向の力を計算したものであり，鉛直上向きに働く浮力 ($-W$) の $\sin \Theta$ 成分に他ならない．これは勿論，船の重量 ($+W$) の $\sin \Theta$ 成分とキャンセルする．

次に，上下方向の力， O 点まわりのモーメントを計算すると

$$\begin{aligned} S_2 &= - \int_{S_H} p_s(x, y) n_2 ds = -\rho g \int_{S_H} (Y + \Theta x) n_2 ds \\ &= -\rho g \int_{-B/2}^{B/2} (Y + \Theta x) dx = -\rho g B Y \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} S_3 &= - \int_{S_H} p_s(x, y) n_3 ds = -\rho g \int_{S_H} (Y + \Theta x) (n_2 x - n_1 y) ds \\ &= -\rho g \Theta \int_{-B/2}^{B/2} x^2 dx + \rho g \Theta \iint_V y dS \\ &= \{ -W \overline{BM} + W \overline{OB} \} \Theta = -W \overline{OM} \Theta \end{aligned} \quad (3.43)$$

となる．ここで B は水線面の幅， \overline{OM} は原点からメタセンターまでの距離を表している．

これらは一見複雑そうに見えるが，造船工学では常識的な静的復原力の計算に他ならない．(3.43) 式は O 点まわりのモーメントであるが，これを G 点まわりのモーメントに直すと

$$S_3 + \overline{OG} S_1 = -W \overline{GM} \Theta \quad (3.44)$$

となり，よく知られた roll の復原モーメントを与えることがわかる．但し重心 G は水面下にある場合を正方向と定義しており， $\overline{GM} = \overline{OG} + \overline{OM}$ である．

Radiation 問題，diffraction 問題での流体力も，モーメントに関しては (3.44) 式と同様に，重心まわりの値に換算する必要があるが，それは浮体の運動方程式を考える時に詳しく述べることにして，次に透過波，反射波の概念を説明しておこう．

3.4 反射波，透過波の計算式

浮体，あるいは没水体による波の変形を考える際には，反射波，透過波の概念は不可欠である．これらの性質は，物体に働く流体力との関係，物体の動揺によって造られる波との関係を調べる時に詳しく解説することにして，ここでは定義式について述べることにしよう．

まず Fig. 3.2 に示すように，入射波が x 軸の正方向から入射してくる場合を考えよう．浮体が左右対称であれば入射波の方向は本質的な違いを生じさせないが，ここでは浮体形状に制限を付けず，一般的

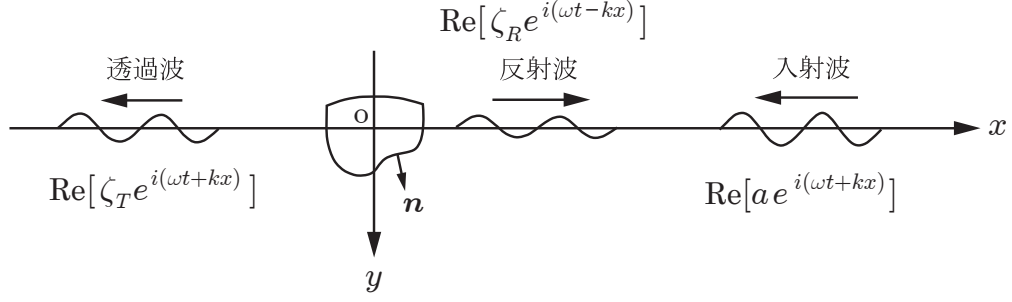


Fig. 3.2 x 軸の正方向から入射してくる場合

に左右非対称としておく．この時，反射波は入射波と反対方向に進み， $x \rightarrow +\infty$ で存在する成分であるから，(3.16) 式より

$$\zeta_R = ia H_4^+(K) - iK \sum_{j=1}^3 X_j H_j^+(K) \quad (3.45)$$

と表すことができる．これを入射波振幅で無次元として次のように表す．

$$C_R \equiv \frac{\zeta_R}{a} = R - iK \sum_{j=1}^3 \left(\frac{X_j}{a} \right) H_j^+(K) \quad (3.46)$$

ここで

$$R = i H_4^+(K) \quad (3.47)$$

すなわち， R は物体の運動を固定した時の反射波係数，(3.46) 式の C_R は動揺を許した時の反射波係数である．

次に透過波は $x \rightarrow -\infty$ に存在し，外方へ伝わる成分であるが，これは入射波と物体の攪乱による波との和で与えられる．したがって (3.45)~(3.47) 式に対応する式は

$$\zeta_T = a \{1 + i H_4^-(K)\} - iK \sum_{j=1}^3 X_j H_j^-(K) \quad (3.48)$$

$$C_T \equiv \frac{\zeta_T}{a} = T - iK \sum_{j=1}^3 \left(\frac{X_j}{a} \right) H_j^-(K) \quad (3.49)$$

$$T = 1 + i H_4^-(K) \quad (3.50)$$

と表すことができる．上式の定義で特に入射波の方向に注意されたい．

続いて入射波の方向が逆の場合，すなわち x 軸の負方向から入射してくる場合について考えよう．この場合，物体が左右非対称であるとするとき，diffraction wave，すなわち diffraction 問題での Kochin 関数が (3.47)，(3.50) 式に用いた $H_4^\pm(K)$ と異なる．そこでそれを明確に表すために Fig. 3.3 の場合の diffraction の Kochin 関数を $h_4^\pm(K)$ としよう．

物体が左右非対称の時は，入射波の方向によって動揺複素振幅も異なるであろうが，これについては (3.46)，(3.49) 式と同じ記号 ξ_j を用いることにする．Radiation 問題の Kochin 関数は入射波には関係しないので入射方向がどちらの場合も当然ながら同じである．

以上のことから (3.46)，(3.47) 式に対応する式は

$$C_R = \frac{\zeta_R}{a} = R - iK \sum_{j=1}^3 \left(\frac{X_j}{a} \right) H_j^-(K) \quad (3.51)$$

ただし

$$R = i h_4^-(K) \quad (3.52)$$

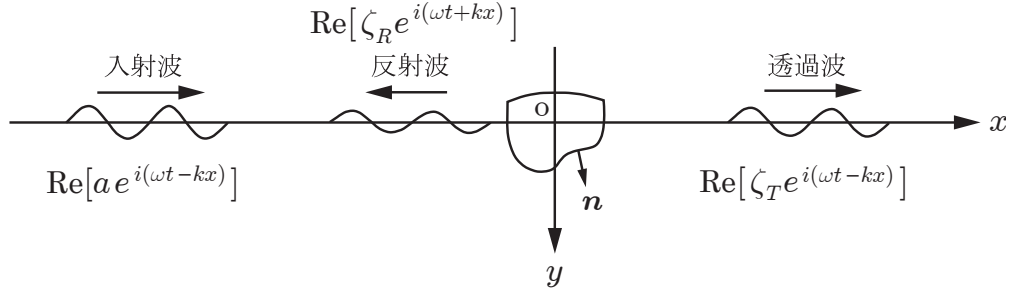


Fig. 3.3 x 軸の負方向から入射してくる場合

であり、透過波係数は (3.49), (3.50) 式に対応して次のように表すことができる。

$$C_T = \frac{\zeta_T}{a} = T - iK \sum_{j=1}^3 \left(\frac{X_j}{a} \right) H_j^+(K) \quad (3.53)$$

ただし

$$T = 1 + i h_4^+(K) \quad (3.54)$$

以上で流体力、反射波・透過波係数の定義式が与えられたので、次節ではグリーンの公式を用いることによってそれらの間に成り立つ関係式等について解説する。

3.5 グリーンの公式適用による各種関係式の導出

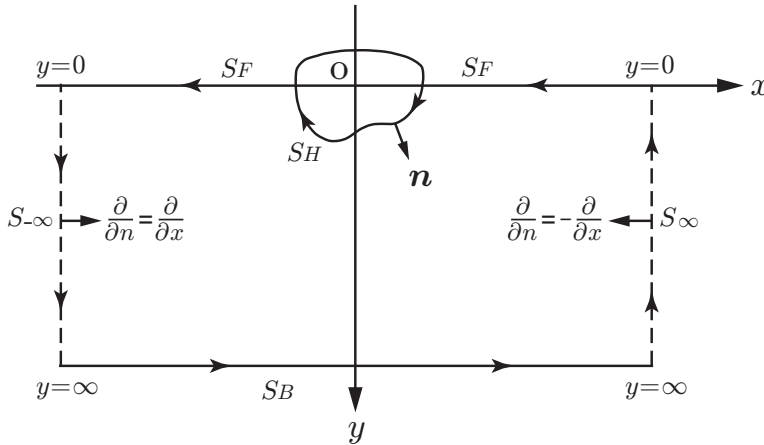


Fig. 3.4 グリーンの公式の適用

速度ポテンシャルの積分表示式を求めるために 2.2 節でグリーンの公式を用いたが、ここでもう一度グリーンの公式を用いた式変形について考えてみることにしよう。

Fig. 3.4 のように $S_H, S_F, S_{-\infty}, S_B, S_{+\infty}$ の一周線積分で囲まれる流体領域を考え、法線は流体の内向きを正と定義する。式変形の出発点となるグリーンの公式は (2.40) 式で与えられているが、ここでは 2 次元理論であるので (2.40) 式に対応する式は次のように表すことができる。

$$-\oint_C \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dl = \iint_S \left[\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \right] dS \quad (3.55)$$

ここで ϕ, ψ はグリーン関数とは異なり、流場内のいたるところで特異性のない (正則な) 速度ポテンシャルとする。すなわち $\nabla^2 \phi = 0, \nabla^2 \psi = 0$ が成り立つので (3.55) 式の右辺はゼロである。更に、 ϕ, ψ はともに S_F 上で同じ線形自由表面条件式を満たし、 $y \rightarrow \infty$ ではゼロとなる関数であると仮定する。しかし $S_{\pm\infty}$ でのいわゆる radiation 条件 (外方への放射条件) は満足していてもよいとする。この時、(3.55) 式の左辺の一周線積分のうち、 S_F, S_B 上の積分は 2.2 節の解説と同じ理由でゼロとなり、

物体表面 (S_H) 上の積分と、無限遠での仮想境界面 $S_\infty, S_{-\infty}$ 上の積分が残るだけとなる。そこで法線の向きに注意しながら (3.55) 式を変形すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{S_H} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dl &= - \left[\int_{S_\infty} + \int_{S_{-\infty}} \right] \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dl \\ &= \int_0^\infty dy \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} \end{aligned} \quad (3.56)$$

上式で $\left[\quad \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}$ は被積分関数の $x = +\infty$ での値と $x = -\infty$ での値との差を表す。

ところで線形自由表面条件式を満たす速度ポテンシャルは、(3.14) 式に示されているように、必ず $A(K, x) e^{-Ky}$ の形をしているので、 y に関する積分は先に実行しておくこともできる。すなわち、

$$\int_0^\infty e^{-2Ky} dy = \frac{1}{2K} \quad (3.57)$$

を用いて

$$\int_{S_H} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dl = \frac{1}{2K} \left[\left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{y=0} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} \quad (3.58)$$

と式変形できる。これが以後の関係式を導く上での基本式である。

付加質量，減衰力係数の対称関係

ϕ, ψ としていろいろな組み合わせが考えられるが、最初はともに radiation 問題の解、すなわち $\phi = \varphi_i, \psi = \varphi_j$ とする。これは radiation 条件を満たしているので (3.58) 式の右辺はゼロとなるが、具体的には (3.14) 式より

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x, 0) &\sim iH_i^\pm(K) e^{\mp iKx} \\ \varphi_j(x, 0) &\sim iH_j^\pm(K) e^{\mp iKx} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

であるから、(3.58) 式に代入して確かめることができる。したがって

$$\int_{S_H} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dl = \int_{S_H} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dl \quad (3.60)$$

であり (3.39) 式より

$$T_{ji} = T_{ij} \quad (3.61)$$

であることが証明できた。ここで実数部，虚数部に分けて考えれば (3.38) 式によって

$$A_{ji} = A_{ij}, \quad B_{ji} = B_{ij} \quad (3.62)$$

ということである。これは付加質量，減衰力係数の対称関係 (symmetry relation) を表している。

ところで流体力の transfer function T_{ij} は、 $n_1 ds = dy, n_2 ds = -dx$ の関係を用いることによって、次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} T_{1j} &= (i\omega)^2 \rho \int_{S_H} \varphi_j(x, y) dy \\ T_{2j} &= -(i\omega)^2 \rho \int_{S_H} \varphi_j(x, y) dx \\ T_{3j} &= -(i\omega)^2 \rho \int_{S_H} \varphi_j(x, y) (x dx + y dy) \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

したがって、物体形状が左右対称な場合には、heave ($j = 2$) では $\varphi_2(-x, y) = \varphi_2(x, y)$ ，sway ($j = 1$) および roll ($j = 3$) では $\varphi_j(-x, y) = -\varphi_j(x, y)$ となっているので次式の関係が成り立つことは容易に理解できる。

$$T_{12} = T_{21} = T_{23} = T_{32} = 0 \quad (3.64)$$

すなわち，この式から対称運動 (heave) と反対称運動 (sway, roll) とは連成せず，分離して考えてもよいことがわかる．

エネルギー関係式

次に $\phi = \varphi_i, \psi = \bar{\varphi}_j$ (関数の上のバーは複素共役を表すこととする) として (3.58) 式を考えてみよう．この時 (3.39) 式，ならびに物体表面境界条件式 (3.11) を用いると，左辺は

$$\int_{S_H} \left(\varphi_i \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial n} - \bar{\varphi}_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dl = -\frac{1}{\rho} \left\{ A_{ji} + \frac{1}{i\omega} B_{ji} - \left(A_{ji} - \frac{1}{i\omega} B_{ij} \right) \right\} = \frac{2i}{\rho\omega} B_{ij} \quad (3.65)$$

である．但し (3.62) 式を用いた．一方，右辺は (3.59) 式より

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x, 0) &\sim i H_i^\pm(K) e^{\mp iKx}, & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &\sim \pm K H_i^\pm(K) e^{\mp iKx} \\ \bar{\varphi}_j(x, 0) &\sim -i \bar{H}_j^\pm(K) e^{\pm iKx}, & \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial x} &\sim \pm K \bar{H}_j^\pm(K) e^{\pm iKx} \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

したがって，

$$\text{右辺} = i \left\{ H_i^+(K) \bar{H}_j^+(K) + H_i^-(K) \bar{H}_j^-(K) \right\} \quad (3.67)$$

となる．(3.65) 式と (3.67) 式は等しいから結局次式が得られたことになる．

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \rho\omega \left\{ H_i^+(K) \bar{H}_j^+(K) + H_i^-(K) \bar{H}_j^-(K) \right\} \quad (3.68)$$

この式は一般的なものであるが，特に左右対称な物体の場合には (3.24) 式，(3.25) 式のような関係があるので，次のように変形することができる．

$$B_{22} = \rho\omega |H_2^+(K)|^2 \quad (3.69)$$

$$B_{ij} = \rho\omega H_i^+(K) \bar{H}_j^+(K) \quad (i, j \text{ は } 1 \text{ または } 3) \quad (3.70)$$

次に diffraction 問題について考えよう．(3.58) 式の ϕ, ψ の組み合わせとして $\phi = \phi_d (= \varphi_0 + \varphi_4)$ ， $\psi = \bar{\phi}_d (= \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_4)$ とする．Diffraction ポテンシャルの物体表面境界条件は (3.10) 式であるので (3.58) 式の右辺がゼロとなることは明らかである．したがって

$$\left[\left(\phi_d \frac{\partial \bar{\phi}_d}{\partial x} - \bar{\phi}_d \frac{\partial \phi_d}{\partial x} \right)_{y=0} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0 \quad (3.71)$$

ここで 3.4 節の Fig. 3.2 のような状態，すなわち x 軸の正方向から入射波がくる場合を考えることにすると，(3.47) 式，(3.50) 式の記号を用いて

$$\left. \begin{aligned} \text{as } x \rightarrow +\infty & \left. \begin{aligned} \phi_d(x, 0) &\sim e^{iKx} + i H_4^+(K) e^{-iKx} = e^{iKx} + R e^{-iKx} \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial x} &\sim iK \{ e^{iKx} - R e^{-iKx} \} \end{aligned} \right\} \\ \text{as } x \rightarrow -\infty & \left. \begin{aligned} \phi_d(x, 0) &\sim e^{iKx} + i H_4^-(K) e^{iKx} = T e^{iKx} \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial x} &\sim iKT e^{iKx} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

これらを (3.71) 式に代入すると

$$\begin{aligned} &-iK(e^{-iKx} - \bar{R}e^{iKx})(e^{iKx} + R e^{-iKx}) \\ &-iK(e^{-iKx} + \bar{R}e^{iKx})(e^{iKx} - R e^{-iKx}) + 2iKT\bar{T} = 0 \end{aligned}$$

したがって

$$R\bar{R} + T\bar{T} = |R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (3.73)$$

なる結果が得られる． R, T は入射波振幅 a で無次元化した反射波，透過波係数であるから，(3.73) 式は物体の存在によって入射波が散乱されても，その前後で波のエネルギーは保存されていることを意味している．

ところで 1.4 節においてエネルギー保存の原理を紹介した．Diffraction 問題における関係式は (1.35) 式であるが，これは式変形すれば (3.71) 式の計算と全く等価であることがわかる．一方，radiation 問題における関係式は (1.36) 式ということであるが，これが (3.68) 式と等価であることを示すには少し式変形が必要であろう．

ここでは若干異なった方法でエネルギー関係式を導いてみる． j モードの動揺を考えることにして，物体が流体に対してなす仕事を求めると，これは作用・反作用の法則で

$$W_D = \overline{\int_{S_H} P V_n dl} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_H} p(x, y) (-i\omega X_j n_j) dl$$

$$p(x, y) = -\rho i\omega(i\omega X_j) \{ \varphi_{jc} + i\varphi_{js} \}$$

したがって

$$W_D = \frac{1}{2} (\omega X_j)^2 \rho \omega \int_{S_H} \varphi_{js} n_j dl = \frac{1}{2} (\omega X_j)^2 B_{jj} \quad (3.74)$$

と計算でき，仕事には減衰力だけが関係し，慣性力項は寄与しないことがわかる．

次に無限遠でのエネルギーの時間変化率を考える．振幅 a の進行波のエネルギーは (1.78) 式で示したように $\frac{1}{2}\rho g a^2$ であり， j モードの動揺による波の振幅は (3.18) 式で与えられているので

$$\left. \begin{aligned} E^+ &= \frac{1}{2} \rho g (K X_j)^2 |H_j^+(K)|^2 = \frac{1}{2} \rho \omega (\omega X_j)^2 |H_j^+(K)|^2 \frac{\omega}{g} \\ E^- &= \frac{1}{2} \rho g (K X_j)^2 |H_j^-(K)|^2 = \frac{1}{2} \rho \omega (\omega X_j)^2 |H_j^-(K)|^2 \frac{\omega}{g} \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

更にこれらのエネルギーは群速度 $c_g = \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} \frac{g}{\omega}$ で伝播されるので，エネルギーの時間変化率は

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= (E^+ + E^-) c_g \\ &= \frac{1}{2} (\omega X_j)^2 \frac{1}{2} \rho \omega \{ |H_j^+(K)|^2 + |H_j^-(K)|^2 \} \end{aligned} \quad (3.76)$$

である．これが (3.74) 式に等しいとすれば，既に求めた (3.68) 式の $i = j$ の場合の式が得られることになる．

Haskind-Newman の関係

続いて radiation 問題と diffraction 問題の相互の関係について調べていこう．まず，(3.58) 式において $\phi = \phi_d = \varphi_0 + \varphi_4$ ， $\psi = \varphi_j$ ($j = 1, 2, 3$) としてみる．この時，物体表面境界条件式 (3.10)，(3.11)，及び波浪強制力の計算式 (3.40) によって，

$$\begin{aligned} (3.58) \text{ 式の左辺} &= \int_{S_H} \left(\phi_d \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial \phi_d}{\partial n} \right) dl \\ &= \int_{S_H} (\varphi_0 + \varphi_4) n_j dl = E_j / \rho g a \end{aligned} \quad (3.77)$$

一方，

$$\begin{aligned} \text{as } x \rightarrow +\infty \quad \phi_d(x, 0) &\sim e^{iKx} + R e^{-iKx}, \quad \varphi_j(x, 0) \sim i H_j^+(K) e^{-iKx} \\ \text{as } x \rightarrow -\infty \quad \phi_d(x, 0) &\sim T e^{iKx}, \quad \varphi_j(x, 0) \sim i H_j^-(K) e^{iKx} \end{aligned}$$

$$(3.58) \text{ 式の右辺} = \frac{1}{2K} \left[e^{iKx} K H_j^+(K) e^{-iKx} \right] \times 2 = H_j^+(K) \quad (3.78)$$

したがって, (3.77), (3.78) 式より

$$E_j = \rho g a H_j^+(K) \quad (3.79)$$

の結果が得られた。

ここで考えている diffraction 問題は, x 軸の正方向からの入射波であったから (3.79) 式の物理的意味は次のとおりである。 $H_j^+(K)$ は (3.18) 式に示すように, $x \rightarrow +\infty$ に伝播する j モードの動揺による radiation wave (に比例した量) であるから, x 軸の正方向からの入射波による j 方向の波浪強制力は, j モードの動揺によって入射波と反対方向へ進む発散波の複素振幅を知ることによって計算できることである。この関係式を Haskind-Newman の関係と称する。

このように, 一見無関係と思える radiation 問題と diffraction 問題との間にいろいろな関係があることは大変興味深い。同様の手法を更に拡張してみよう。

今度は (3.58) 式において $\phi = \phi_d = \varphi_0 + \varphi_4$, $\psi = \bar{\varphi}_j$ ($j = 1, 2, 3$) としてみる。(3.77), (3.78) 式の計算と殆ど同じであるが radiation ポテンシャルが複素共役となっている。この時も物体表面境界条件式 (3.10), (3.11) 式によって次のように計算できる。

$$\begin{aligned} (3.58) \text{ 式の左辺} &= \int_{S_H} \left(\phi_d \frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial n} - \bar{\varphi}_j \frac{\partial \phi_d}{\partial n} \right) dl \\ &= \int_{S_H} (\varphi_0 + \varphi_4) n_j dl = E_j / \rho g a \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} (3.58) \text{ 式の右辺} &= \frac{1}{2K} \left\{ (e^{iKx} + R e^{-iKx}) K \bar{H}_j^+ e^{iKx} - \bar{H}_j^+ e^{iKx} K (e^{iKx} - R e^{-iKx}) \right. \\ &\quad \left. + T K \bar{H}_j^- + \bar{H}_j^- K T \right\} \\ &= \bar{H}_j^+(K) R + \bar{H}_j^-(K) T \end{aligned} \quad (3.81)$$

したがって

$$E_j = \rho g a \{ \bar{H}_j^+(K) R + \bar{H}_j^-(K) T \} \quad (3.82)$$

を得ることができた。この式で波浪強制力の計算をすることはあまり便利ではないが, この式と (3.79) 式が等しいことにより, 次の関係式を得ることができる。

$$H_j^+(K) = \bar{H}_j^+(K) R + \bar{H}_j^-(K) T \quad (3.83)$$

Radiation wave と Diffraction wave の関係

ここでは物体形状が左右対称であると仮定しよう。その時 (3.83) 式から radiation 問題の Kochin 関数 (すなわち radiation wave) と diffraction 問題の Kochin 関数 (すなわち diffraction wave) との間に成り立つ重要な関係式を導くことができる。

物体が左右対称の時は, (3.24), (3.25) 式から, $H_2^+ = H_2^-$, $H_j^+ = -H_j^-$ ($j = 1$ or 3) であることに注意し, R, T として (3.47), (3.50) 式を用いると, 次式を得ることができる。

$$H_2^+ = \bar{H}_2^+ (iH_4^+ + 1 + iH_4^-) \quad (3.84)$$

$$H_j^+ = \bar{H}_j^+ (iH_4^+ - 1 - iH_4^-) \quad j = 1 \text{ or } 3 \quad (3.85)$$

ここで, (3.26) 式より $H_4^\pm(K) = C_4(K) \pm iS_4(K)$ と表すことができるので, まず (3.84) 式より

$$\begin{aligned} 1 + 2iC_4 &= H_2^+ / \bar{H}_2^+ \\ 2iC_4 &= (H_2^+ - \bar{H}_2^+) / \bar{H}_2^+ = 2i \text{Im}(H_2^+) / \bar{H}_2^+ \end{aligned} \quad (3.86)$$

Heave の Kochin 関数は (3.24) 式に示すように, $H_2^+ = H_{2c}^+ + iH_{2s}^+$ と表す時, H_{2c}^+, H_{2s}^+ はともに実数であるので, $\text{Im}(H_2^+) = H_{2s}^+$ である. したがって上式より

$$C_4 = H_{2s}^+ / \overline{H_2^+} \quad (3.87)$$

を得る. $C_4(K)$ は diffraction wave のうち左右対称な成分を表しているから, (3.87) 式は左右対称な成分どおしの関係である.

同様の式変形を (3.85) 式について行うと左右反対称な成分の関係式を求めることができる. まず, (3.86) 式に対応して次式を得る.

$$-2S_4 = (H_j^+ + \overline{H_j^+}) / \overline{H_j^+} = 2\text{Re}(H_j^+) / \overline{H_j^+} \quad (3.88)$$

Sway, roll の Kochin 関数は $H_j^+ = H_{jc}^+ + iH_{js}^+$ と表す時, H_{jc}^+, H_{js}^+ はともに純虚数であるので $\text{Re}(H_j^+) = iH_{js}^+$ であることに注意すると, 上式より

$$S_4 = -iH_{js}^+ / \overline{H_j^+} \quad (3.89)$$

を得る. したがって (3.87), (3.89) 式より次の結果が得られる.

$$H_4^\pm = C_4 \pm iS_4 = \frac{H_{2s}^+}{\overline{H_2^+}} \pm \frac{H_{js}^+}{\overline{H_j^+}} \quad (3.90)$$

この式によれば, radiation 問題の Kochin 関数だけから, diffraction 問題の Kochin 関数を求めることができる. Radiation 問題の Kochin 関数として, (3.29) 式を代入すれば H_4^\pm は次のように表すことも可能である.

$$H_4^\pm = i e^{i\varepsilon H} \cos \varepsilon H \mp e^{i\varepsilon S} \sin \varepsilon S \quad (3.91)$$

この式には進行波振幅比は含まれておらず, したがって H_2^+, H_1^+ の位相差さえわかっているならば H_4^\pm が計算できるということになる. 物理的には強制動揺によってできる波の振幅は関係なく, 強制動揺に対する進行波の位相差だけから diffraction wave が求められるということである.

別所の関係

ところで (3.85) 式や (3.90) 式で反対称モードは $j=1$ の sway でも $j=3$ の roll でも良いわけであるから, sway と roll の Kochin 関数にも簡単な関係式が存在するはずである. (3.85) 式を $j=1$ と $j=3$ で考えると, 次式が得られる.

$$H_1^+ / \overline{H_1^+} = H_3^+ / \overline{H_3^+}$$

$$\text{したがって} \quad H_3^+ / H_1^+ = \overline{H_3^+} / \overline{H_1^+} \equiv \ell_w \quad (3.92)$$

なる関係を得る (複素共役が元の値に等しいので ℓ_w は実数であることに注意しよう.)

この式を減衰力係数の計算式 (3.70) 式に代入すると次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} B_{13} &= B_{31} = \ell_w B_{11} \\ B_{33} &= \ell_w^2 B_{11} \end{aligned} \right\} \quad (3.93)$$

すなわち, sway の減衰力係数 B_{11} から roll の減衰力係数 B_{33} が計算でき, それに必要な ℓ_w の値は $\ell_w = B_{31} / B_{11}$ の関係から求めればよいので, 結局 roll の境界値問題は解く必要がないことになる (実際には付加質量項 A_{33} を求めるために解かなければならないので, (3.93) 式は数値計算の時の check として用いることになろう.) (3.93) 式を別所の関係式と呼ぶ.

(3.83) 式を出発点として種々の関係式を導いたが, これらは物体が左右対称という仮定の下に求められたものであることに注意しておこう.

左右非対称物体の diffraction 問題での Kochin 関数

ここでは形状が左右非対称な物体について考える．3.4 節では入射波の方向が違う 2 つの場合を考え，Fig. 3.2 の場合（ x 軸の正方向からの入射波）の Kochin 関数を $H_4^\pm(K)$ と表し，Fig. 3.3 の場合（ x 軸の負方向からの入射波）の Kochin 関数を $h_4^\pm(K)$ と表した．ここでは (3.58) 式を適用することによって， $H_4^\pm(K)$ と $h_4^\pm(K)$ の間に成り立つ関係式を求めておこう．(3.58) 式の ϕ として Fig. 3.2 の場合の diffraction ポテンシャル ϕ_d を考え， ψ として Fig. 3.3 の場合の diffraction ポテンシャル（これを ψ_d とする）を考える．この時，物体表面境界条件式から (3.58) 式の左辺はゼロとなる．

$$\left[\left(\phi_d \frac{\partial \psi_d}{\partial x} - \psi_d \frac{\partial \phi_d}{\partial x} \right)_{y=0} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0 \quad (3.94)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \phi_d(x, 0) &\sim e^{iKx} + iH_4^+ e^{-iKx} \\ \psi_d(x, 0) &\sim e^{-iKx} + ih_4^+ e^{-iKx} \end{aligned} \right\} \text{as } x \rightarrow +\infty \quad (3.95)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_d(x, 0) &\sim e^{iKx} + iH_4^- e^{iKx} \\ \psi_d(x, 0) &\sim e^{-iKx} + ih_4^- e^{iKx} \end{aligned} \right\} \text{as } x \rightarrow -\infty \quad (3.96)$$

この時 (3.94) 式は次のように計算される．

$$\begin{aligned} &-iK(e^{iKx} + iH_4^+ e^{-iKx})e^{-iKx}(1 + ih_4^+) - iK(e^{iKx} - iH_4^+ e^{-iKx})e^{-iKx}(1 + ih_4^+) \\ &+ iK e^{iKx}(1 + iH_4^-)(e^{-iKx} - ih_4^- e^{iKx}) + iK e^{iKx}(1 + iH_4^-)(e^{-iKx} + ih_4^- e^{iKx}) = 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

したがって

$$h_4^+(K) = H_4^-(K) \quad (3.98)$$

$h_4^+(K)$ も $H_4^-(K)$ も (3.50) 式，(3.54) 式からわかるように透過波係数に関係している．(3.98) 式は，物体が左右非対称な場合でも，入射波がどちらから来ても透過波係数はその位相も含めて全く同じであることを示している．

(3.58) 式で $\phi = \bar{\phi}_d$ ， $\psi = \psi_d$ とした計算を考えよう．この場合も左辺はゼロであるから，(3.94) 式で ϕ_d を $\bar{\phi}_d$ とした関係が成り立つ．そこで (3.95)，(3.96) 式を用いて計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned} &-iK(e^{-iKx} - i\bar{H}_4^+ e^{iKx})e^{-iKx}(1 + ih_4^+) + iK(e^{-iKx} + i\bar{H}_4^+ e^{iKx})e^{-iKx}(1 + ih_4^+) \\ &+ iK e^{-iKx}(1 - i\bar{H}_4^-)(e^{-iKx} - ih_4^- e^{iKx}) - iK e^{-iKx}(1 - i\bar{H}_4^-)(e^{-iKx} + ih_4^- e^{iKx}) = 0 \end{aligned} \quad (3.99)$$

したがって

$$\bar{H}_4^+(1 + ih_4^+) = h_4^-(1 - i\bar{H}_4^-) \quad (3.100)$$

(3.98) 式を代入して

$$h_4^-(K) = \bar{H}_4^+(K) \frac{1 + iH_4^-(K)}{1 - i\bar{H}_4^-(K)} \quad (3.101)$$

を得る．この式から $|h_4^-(K)| = |H_4^+(K)|$ であることがわかるから，(3.47) 式，(3.52) 式より次のことが言える．すなわち，物体が左右非対称な場合，入射波がどちらから来ても反射波係数の振幅は同じであるが，一般的に位相は異なる．

左右非対称物体は消波装置や波エネルギー吸収装置を考える上で実際的なものと思われるが，それらに関する理論を考える時，(3.98) 式，(3.101) 式は Haskind-Newman の関係とともに重要な公式である．

エネルギー等分配則

左右対称浮体について，(3.101) 式が意味することをもう少し考えてみる．浮体が左右対称であれば，もちろん $H_4^\pm(K) = h_4^\mp(K)$ である．したがって (3.101) 式は

$$H_4^+(K)\{1 - i\bar{H}_4^-(K)\} = \bar{H}_4^+(K)\{1 + iH_4^-(K)\} \quad (3.102)$$

であり，これは (3.47)，(3.50) 式の反射波係数，透過波係数を用いて次のように表すことができる．

$$R\bar{T} + \bar{R}T = 0$$

$$\text{すなわち} \quad \text{Re}\{R\bar{T}\} = 0 \quad (3.103)$$

一方，(3.73) 式のエネルギー保存則として $|R|^2 + |T|^2 = 1$ が成り立っているので，これらから

$$|R \pm T| = 1 \quad (3.104)$$

の関係式が得られる．

ところで， $x \rightarrow +\infty$ での反射波係数 $f(x) = R$ と $x \rightarrow -\infty$ での透過波係数 $f(-x) = T$ から

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\{f(x) + f(-x)\} + \frac{1}{2}\{f(x) - f(-x)\} \\ &= \frac{1}{2}(R+T) + \frac{1}{2}(R-T) \end{aligned} \quad (3.105)$$

と表すことができることからわかるように， $\frac{1}{2}(R+T)$ は対称波成分の振幅， $\frac{1}{2}(R-T)$ は反対称波成分の振幅である．

すなわち (3.104) 式は，入射波が浮体によって散乱された後も，対称波と反対称波の振幅は等しく $1/2$ であり，したがってそれぞれのエネルギーも等しいということを示唆している．そこで (3.104) 式をエネルギー等分配則という．この関係は，浮体が固定されている場合だけでなく，浮体の動揺を自由にした時にも成り立つが，これは次章で具体的に示される．

3.6 左右対称浮体の動揺特性

これまでの解説で，物体に働く流体力に関してはかなりの情報を得ることができた．ここではそれらを基に波浪中での運動方程式を組立て，動揺特性について調べることにするが，本質を理解するために物体は左右対称であると仮定する．左右対称物体では，(3.64) 式で示したように，対称モードの heave と反対称モードの sway, roll とは連成しないので別々に考えることができる．そこで最初に heave について考える．

流体力は全て慣性座標系で考えていたことに注意してニュートンの第 2 法則を適用する．その際，方程式の右辺に来るべき外力項は radiation force，波浪強制力，静水圧の変動分による流体力を考えればよいので，(3.36) 式，(3.40) 式，(3.42) 式によって次式となることがわかる．

$$m \ddot{y}_G = \text{Re}\left\{(F_2 + E_2 - \rho g B Y) e^{i\omega t}\right\} \quad (3.106)$$

ここで m は浮体の質量 ($= W/g$) であり， y_G は重心の上下変位である．上式の特解を求めるために， $y_G = \text{Re}[Y e^{i\omega t}]$ を代入し， Re の記号および時間項 $e^{i\omega t}$ を除いて表すと，次式が得られる．

$$\left[-\omega^2(m + A_{22}) + i\omega B_{22} + \rho g B\right] Y = E_2 \quad (3.107)$$

$$\text{ここで (3.69) 式より} \quad B_{22} = \rho \omega |H_2^+(K)|^2 \quad (3.108)$$

$$(3.79) \text{ 式より} \quad E_2 = \rho g a H_2^+(K) \quad (3.109)$$

$$(3.29) \text{ 式より} \quad H_2^+(K) = \frac{i}{K} \bar{A}_H e^{i\epsilon_H} \quad (3.110)$$

なる関係があることに注意しよう．さらに，簡単化のため次のような記号を定義する．

$$\rho g B - \omega^2(m + A_{22}) \equiv \rho \omega^2 E^2 \quad (3.111)$$

$$H_{2E}^+ = H_2^+ / E \quad (3.112)$$

$$\alpha_H = \text{Tan}^{-1} \frac{E^2}{|H_2^+|^2} = \text{Tan}^{-1} \frac{\rho g B - \omega^2(m + A_{22})}{\omega B_{22}} \quad (3.113)$$

この時 (3.107) 式は

$$i\omega Y \rho \omega \{ |H_2^+|^2 - iE^2 \} = \rho g a H_2^+$$

したがって

$$\frac{Y}{a} = \frac{|\cos \alpha_H| e^{i\alpha_H}}{iK \overline{H_2^+}} = \frac{1}{K E} \frac{H_{2E}^+}{\{1 + i|H_{2E}^+|^2\}} \quad (3.114)$$

(3.114) 式を次のように表しておこう．

$$\left. \begin{aligned} Y &= Y_A e^{i\delta_Y} \\ Y_A &= a \frac{|\cos \alpha_H|}{A_H}, \quad \delta_Y = \varepsilon_H + \alpha_H \end{aligned} \right\} \quad (3.115)$$

ここで同調点での挙動について考えてみると，同調点では (3.111) 式で $E = 0$ ，すなわち (3.113) 式より $\alpha_H = 0$ であるから (3.114)，(3.115) 式は次のようになる．

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{-i\rho g a H_2^+}{\rho \omega^2 |H_2^+|^2} = \frac{a}{iK \overline{H_2^+}} \\ Y_A &= \frac{a}{A_H}, \quad \delta_Y = \varepsilon_H \end{aligned} \right\} \quad (3.116)$$

(3.116) の最初の式によれば，上下揺の位相は波浪強制力 ($E_2 = \rho g a H_2^+$) の位相より $\pi/2$ 遅れている ($-i$ が掛かっている) ことがわかる．

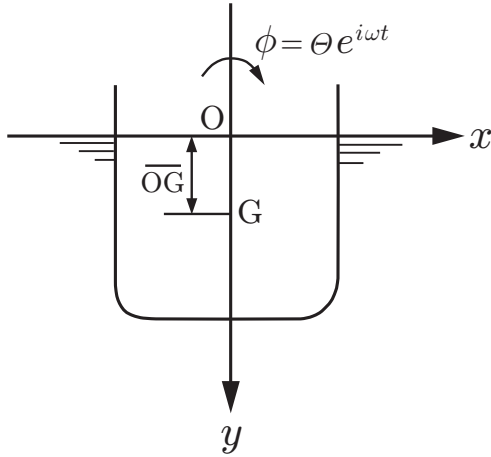


Fig. 3.5 座標変換

次に反対称モードの運動，sway と roll について考える．sway と roll は連成するので少し複雑になるが，連成を考えない場合には heave の場合と基本的に同じである．したがってここでは連成運動方程式について考える．

まず，roll の運動方程式は重心 G まわりで考えるのが便利であるから，横揺モーメントを原点 O まわりから G まわりの値へ換算する方法について示す．

Fig. 3.5 に示すように重心 G は水面下にある時を正と定義して G まわりの流体力の計算をすると，例えば (3.63) 式は

$$\begin{aligned} T_{G3j} &= -\rho(i\omega)^2 \int_{S_H} \varphi_j \{ x dx + (y - \overline{OG}) dy \} \\ &= T_{3j} + \overline{OG} T_{1j} \end{aligned} \quad (3.117)$$

となる．

また sway の速度は角度の影響が入ってくるので

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_G + \dot{\phi} \overline{OG} \\ x &= X e^{i\omega t} = X_1 e^{i\omega t}, \quad \phi = \Theta e^{i\omega t} = X_3 e^{i\omega t} \\ x_G &\equiv X_G e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (3.118)$$

である．これらを用いて，重心 G まわりの radiation moment を考えると (3.36) , (3.38) 式より

$$\begin{aligned}
F_{G3} &= T_{G31}X + T_{G33}\Theta \\
&= (T_{31} + \overline{OG}T_{11})(X_G + \Theta\overline{OG}) + (T_{33} + \overline{OG}T_{13})\Theta \\
&= (T_{31} + \overline{OG}T_{11})X_G + \{T_{33} + \overline{OG}(T_{13} + T_{31}) + \overline{OG}^2T_{11}\}\Theta \\
&= (T_{31} + \overline{OG}T_{11})X_G + \{T_{33} + 2\overline{OG}T_{13} + \overline{OG}^2T_{11}\}\Theta
\end{aligned} \tag{3.119}$$

となる．同様にして sway の radiation force は，roll による寄与もあるので次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}
F_{G1} &= T_{11}X + T_{13}\Theta = T_{11}(X_G + \Theta\overline{OG}) + T_{13}\Theta \\
&= T_{11}X_G + (T_{13} + \overline{OG}T_{11})\Theta
\end{aligned} \tag{3.120}$$

(3.119) , (3.120) 式を付加質量，減衰力係数で表す時には，(3.93) 式の別所の関係を考慮して次のような記号を定義しよう．

$$\left. \begin{aligned}
A_{13} &= A_{31} = A_{11} \ell_a, & \overline{OG} + \ell_a &\equiv \ell_m \\
B_{13} &= B_{31} = B_{11} \ell_w, & \overline{OG} + \ell_w &\equiv \ell_n \\
B_{33} &= B_{11} \ell_w^2
\end{aligned} \right\} \tag{3.121}$$

この時

$$\begin{aligned}
F_{G3} e^{i\omega t} &= -\ddot{x}_G A_{11} \ell_m - \dot{x}_G B_{11} \ell_n \\
&\quad - \ddot{\phi} \{A_{33} + A_{11} \overline{OG} (\ell_a + \ell_m)\} - \dot{\phi} B_{11} \ell_n^2
\end{aligned} \tag{3.122}$$

$$F_{G1} e^{i\omega t} = -\ddot{x}_G A_{11} - \dot{x}_G B_{11} - \ddot{\phi} A_{11} \ell_m - \dot{\phi} B_{11} \ell_n \tag{3.123}$$

と表すことができる．

重心 G まわりの波浪強制モーメントも同様に考えて (3.40) 式より

$$\begin{aligned}
E_{G3} &= \rho g a \int_{S_H} (\varphi_0 + \varphi_4) \{x n_2 - (y - \overline{OG}) n_1\} dl \\
&= E_3 + \overline{OG} E_1
\end{aligned} \tag{3.124}$$

$$(3.79) \text{ 式より } E_1 = \rho g a H_1^+, \quad E_3 = \rho g a H_3^+$$

$$(3.92) \text{ 式より } H_3^+ = \ell_w H_1^+$$

したがって

$$E_{G3} = \rho g a H_1^+ (\ell_w + \overline{OG}) = \rho g a H_1^+ \ell_n \tag{3.125}$$

を得ることができた．

静水圧の変動分による流体力については既に説明したように (3.44) 式で与えられる roll の復原モーメントだけを考えればよい．以上のことを用いて運動方程式を作ると heave の (3.106) 式に対応する式は次のようになる．

$$m \ddot{x}_G = \text{Re} \{ (F_{G1} + E_1) e^{i\omega t} \} \tag{3.126}$$

$$I_R \ddot{\phi} = \text{Re} \{ (F_{G3} + E_{G3} - W \overline{GM}) \Theta e^{i\omega t} \} \tag{3.127}$$

(3.122) , (3.123) , (3.125) 式などを代入すると次のように表すことができる．

$$(m + A_{11}) \ddot{x}_G + B_{11} \dot{x}_G + A_{11} \ell_m \ddot{\phi} + B_{11} \ell_n \dot{\phi} = \text{Re} \{ \rho g a H_1^+ e^{i\omega t} \} \tag{3.128}$$

$$(I_R + J_R) \ddot{\phi} + B_{11} \ell_n^2 \dot{\phi} + W \overline{GM} \phi + A_{11} \ell_m \ddot{x}_G + B_{11} \ell_n \dot{x}_G = \text{Re} \{ \rho g a H_1^+ \ell_n e^{i\omega t} \} \tag{3.129}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} J_R &\equiv A_{33} + A_{11} \overline{OG} (\ell_a + \ell_m) \\ (3.70) \text{ 式より } B_{11} &= \rho \omega |H_1^+|^2 \\ (3.29) \text{ 式より } H_1^+ &= \frac{i}{K} \bar{A}_S e^{i\epsilon_S} \end{aligned} \right\} \quad (3.130)$$

ここで次のような記号を定義する .

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2(m + A_{11}) &\equiv \rho \omega^2 S^2 \\ -\omega^2 A_{11} \ell_m &\equiv \rho \omega^2 Q^2 \ell_n \\ W \overline{GM} - \omega^2(I_R + J_R) &\equiv \rho \omega^2 R^2 \ell_n^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.131)$$

$$F^2 \equiv \frac{S^2 R^2 - Q^4}{S^2 + R^2 - 2Q^2} \quad (3.132)$$

$$H_{1F}^+ = H_1^+ / F, \quad \alpha_Q = \text{Tan}^{-1} \frac{F^2}{|H_1^+|^2} \quad (3.133)$$

この時 , 特解を求めるために (3.128) , (3.129) 式に $x_G = \text{Re}\{X_G e^{i\omega t}\}$, $\phi = \text{Re}\{\Theta e^{i\omega t}\}$ を代入してまとめると次式を得る .

$$\left. \begin{aligned} iX_G \left[|H_1^+|^2 - iS^2 \right] + i\ell_n \Theta \left[|H_1^+|^2 - iQ^2 \right] &= \frac{a}{K} H_1^+ \\ iX_G \left[|H_1^+|^2 - iQ^2 \right] + i\ell_n \Theta \left[|H_1^+|^2 - iR^2 \right] &= \frac{a}{K} H_1^+ \end{aligned} \right\} \quad (3.134)$$

これを解くために

$$\begin{aligned} \Lambda &\equiv \ell_n \{ (|H_1^+|^2 - iS^2)(|H_1^+|^2 - iR^2) - (|H_1^+|^2 - iQ^2)^2 \} \\ &= -\ell_n \{ S^2 R^2 - Q^4 + i|H_1^+|^2(S^2 + R^2 - 2Q^2) \} \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$= -i\ell_n(S^2 + R^2 - 2Q^2) \{ |H_1^+|^2 - iF^2 \} \quad (3.136)$$

とおくと

$$\frac{X_G}{a} = \frac{R^2 - Q^2}{K(S^2 R^2 - Q^4)} \frac{H_1^+}{\{1 + i|H_{1F}^+|^2\}} = \frac{1}{iK\bar{H}_1^+} \frac{R^2 - Q^2}{(S^2 + R^2 - 2Q^2)} |\cos \alpha_Q| e^{i\alpha_Q} \quad (3.137)$$

$$\frac{\ell_n \Theta}{a} = \frac{S^2 - Q^2}{K(S^2 R^2 - Q^4)} \frac{H_1^+}{\{1 + i|H_{1F}^+|^2\}} = \frac{1}{iK\bar{H}_1^+} \frac{S^2 - Q^2}{(S^2 + R^2 - 2Q^2)} |\cos \alpha_Q| e^{i\alpha_Q} \quad (3.138)$$

すなわち

$$\frac{X_G + \ell_n \Theta}{a} = \frac{1}{KF} \frac{H_{1F}^+}{\{1 + i|H_{1F}^+|^2\}} = \frac{|\cos \alpha_Q| e^{i\alpha_Q}}{iK\bar{H}_1^+} \quad (3.139)$$

と表すことができる . これは heave の (3.114) 式に対応する式である . Kochin 関数 H_1^+ として (3.130) 式を代入すれば , heave の (3.115) 式に対応する形として次のようにまとめることができる .

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_G + \ell_n \Theta}{a} &\equiv X_A e^{i\delta_X} \\ X_A &= a \frac{|\cos \alpha_Q|}{\bar{A}_S}, \quad \delta_X = \epsilon_S + \alpha_Q \end{aligned} \right\} \quad (3.140)$$

ここで heave の場合と同様に同調時の挙動について調べておく . 同調点では (3.135) 式から明らかに $S^2 R^2 - Q^4 = 0$ であるから , この時には $F = 0$, すなわち (3.133) 式から $\alpha_Q = 0$ である . したがって (3.139) , (3.140) 式から次の結果を得ることができる .

$$\left. \begin{aligned} X_G + \ell_n \Theta &= \frac{a}{iK\bar{H}_1^+} = \frac{a}{\bar{A}_S} e^{i\epsilon_S} \\ X_A &= \frac{a}{\bar{A}_S}, \quad \delta_X = \epsilon_S \end{aligned} \right\} \quad (3.141)$$

このように見てくると，連成を考慮した場合でも $X_G + l_n\theta$ が heave の結果と全く同じ形に表せることがわかる．この $X_G + l_n\theta$ という量は sway, roll による radiation wave を考える際には非常に重要なものであるが，それは次のようにして理解できる．(3.18) 式等より

$$\begin{aligned}
 \zeta_B^\pm &\equiv \zeta_1^\pm + \zeta_3^\pm = -iKXH_1^\pm - iK\Theta H_3^\pm \\
 &= \mp iK(X_G + \theta\overline{OG})H_1^\pm \mp iK\Theta(H_1^\pm l_w) \\
 &= \mp iK(X_G + l_n\theta)H_1^\pm
 \end{aligned} \tag{3.142}$$

となることがわかるので (3.139) 式を直接代入することができる．詳細は次章で示すことになる．(3.142) 式の計算は (3.13) 式からも明らかなように Kochin 関数の計算にも関係しており，この時には入射波振幅 a で無次元化した値，すなわち (3.139) 式そのものが必要となることがわかる．

本節では左右対称物体の 2 次元問題に限定したので解析的に詳しく動揺特性を知ることができた．しかし，左右非対称な物体，3 次元問題では数値計算に頼ることになるであろう．

第 4 章 消波・波吸収理論

前章での知識をベースとして，海洋工学上重要なテーマの一つである消波及び波吸収の理論について解説する．透過波，反射波に関する議論が中心となるが，それらについてもう少し詳しく考えることから始めよう．

4.1 左右対称浮体固定時の反射波，透過波

反射波，透過波の定義については既に 3.4 節で示したが，それらは浮体形状に制限を付けず，しかも動揺を許した時をも含めた一般的な場合に対してのものである．ここでは議論を深めるために浮体は左右対称とし，初めに運動を固定した時について考える．

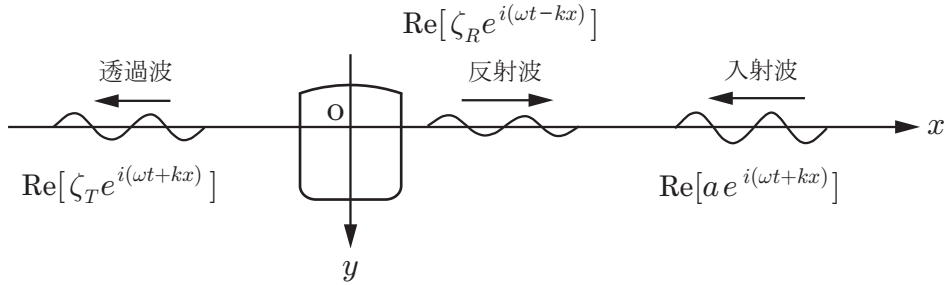


Fig. 4.1 左右対称浮体による反射波，透過波

入射波は x 軸の正方向から来るものとしよう．この時 (3.47), (3.50) 式により，反射波係数 R ，透過波係数 T は次式で定義される．

$$R = \frac{\zeta_R}{a} = iH_4^+(K) \quad (4.1)$$

$$T = \frac{\zeta_T}{a} = 1 + iH_4^-(K) \quad (4.2)$$

浮体は左右対称であるから (3.84), (3.85) 式が成り立つ．したがって上式は radiation 問題での Kochin 関数 H_j^+ ($j = 1 \sim 3$) を用いて次のように表すことができる．

$$R = \frac{1}{2} \left[\frac{H_2^+}{H_2^+} + \frac{H_1^+}{H_1^+} \right] \quad (4.3)$$

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{H_2^+}{H_2^+} - \frac{H_1^+}{H_1^+} \right] \quad (4.4)$$

上式の H_1^+ は H_3^+ でもよいのであるが， $H_3^+ = H_1^+ \ell_w$ の関係があるので，結局は H_1^+ だけで表すことができることに注意されたい．(4.3), (4.4) 式から R, T は Kochin 関数の振幅には関係しないことがわかる．そこで次に R, T を Kochin 関数の位相差を用いて表してみる．

(3.29) 式より

$$H_1^+ = \frac{i}{K} \bar{A}_S e^{i\epsilon_S}, \quad H_2^+ = \frac{i}{K} \bar{A}_H e^{i\epsilon_H} \quad (4.5)$$

したがって

$$\frac{H_1^+}{H_1^+} = -e^{i2\epsilon_S}, \quad \frac{H_2^+}{H_2^+} = -e^{i2\epsilon_H} \quad (4.6)$$

であるから (4.3), (4.4) 式に代入することで次式を得る .

$$\begin{aligned} R &= -\frac{1}{2}(e^{i2\varepsilon_H} + e^{i2\varepsilon_S}) = -\frac{1}{2}e^{i(\varepsilon_H+\varepsilon_S)} \left\{ e^{i(\varepsilon_H-\varepsilon_S)} + e^{-i(\varepsilon_H-\varepsilon_S)} \right\} \\ &= -\cos(\varepsilon_H - \varepsilon_S) e^{i(\varepsilon_H+\varepsilon_S)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2}(e^{i2\varepsilon_H} - e^{i2\varepsilon_S}) = -\frac{1}{2}e^{i(\varepsilon_H+\varepsilon_S)} \left\{ e^{i(\varepsilon_H-\varepsilon_S)} - e^{-i(\varepsilon_H-\varepsilon_S)} \right\} \\ &= -i \sin(\varepsilon_H - \varepsilon_S) e^{i(\varepsilon_H+\varepsilon_S)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

この式によれば, (3.73) 式に示したエネルギー保存則 $|R|^2 + |T|^2 = 1$ が成り立つことは明らかである (勿論 (4.3), (4.4) 式から証明することも可能である.) また (4.3), (4.4) 式から, エネルギー等分配則 $|R \pm T| = 1$ が成り立っていることも容易に確かめられる .

4.2 左右対称浮体動揺時の反射波, 透過波

浮体が j モードの動揺をしている時の反射波係数, 透過波係数は, (3.47), (3.50) 式と (4.3), (4.4) 式によって

$$C_R = \frac{1}{2} \left[\frac{H_2^+}{H_2^+} + \frac{H_1^+}{H_1^+} \right] - iK \sum_{j=1}^3 \left(\frac{X_j}{a} \right) H_j^+ \quad (4.9)$$

$$C_T = \frac{1}{2} \left[\frac{H_2^+}{H_2^+} - \frac{H_1^+}{H_1^+} \right] - iK \sum_{j=1}^3 \left(\frac{X_j}{a} \right) (-1)^j H_j^+ \quad (4.10)$$

と表すことができる . ここで X_j/a は運動方程式の解として与えられる .

初めに heave ($j = 2$) だけしている場合を考えよう . X_2/a として (3.114) 式を代入すればよいので

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{1}{2} \frac{H_2^+}{H_2^+} - iK \left(\frac{X_2}{a} \right) H_2^+ = \frac{1}{2} \frac{H_2^+}{H_2^+} - i \frac{(H_{2E}^+)^2}{1 + i|H_{2E}^+|^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{H_2^+}{H_2^+} \left\{ \frac{1 + i|H_{2E}^+|^2 - 2iH_{2E}^+ \overline{H_{2E}^+}}{1 + i|H_{2E}^+|^2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{H_2^+}{H_2^+} \frac{1 - i|H_{2E}^+|^2}{1 + i|H_{2E}^+|^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

によって

$$C_R = \frac{1}{2} \left[\frac{H_2^+}{H_2^+} \frac{1 - i|H_{2E}^+|^2}{1 + i|H_{2E}^+|^2} + \frac{H_1^+}{H_1^+} \right] \quad (4.12)$$

$$C_T = \frac{1}{2} \left[\frac{H_2^+}{H_2^+} \frac{1 - i|H_{2E}^+|^2}{1 + i|H_{2E}^+|^2} - \frac{H_1^+}{H_1^+} \right] \quad (4.13)$$

となることがわかる . この式から, 動揺を許した時でも動揺振幅には関係なく, 位相差だけで計算できることがわかる . 具体的には (3.113), (3.115) 式より

$$\tan^{-1}|H_{2E}^+|^2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_H = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_H - \delta_Y$$

したがって

$$\begin{aligned} C_R &= -\frac{1}{2} \left\{ e^{i2\varepsilon_H - i\pi - i2(\varepsilon_H - \delta_Y)} + e^{i2\varepsilon_S} \right\} = \frac{1}{2} (e^{i2\delta_Y} - e^{i2\varepsilon_S}) \\ &= i \sin(\delta_Y - \varepsilon_S) e^{i(\delta_Y + \varepsilon_S)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$C_T = \frac{1}{2} (e^{i2\delta_Y} + e^{i2\varepsilon_S}) = \cos(\delta_Y - \varepsilon_S) e^{i(\delta_Y + \varepsilon_S)} \quad (4.15)$$

と表すことができる . この式から上下揺している時でもエネルギー保存則

$$|C_R|^2 + |C_T|^2 = 1 \quad (4.16)$$

が成り立っていることは明らかであろう .

Heave の同調時について考えてみると , (3.116) 式より $\delta_Y = \varepsilon_H$ であるから

$$\left. \begin{aligned} C_{R,\text{reso}} &= i \sin(\varepsilon_H - \varepsilon_S) e^{i(\varepsilon_H + \varepsilon_S)} = -T \\ C_{T,\text{reso}} &= \cos(\varepsilon_H - \varepsilon_S) e^{i(\varepsilon_H + \varepsilon_S)} = -R \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

となっている . すなわち , 浮体固定時の透過波係数 , 反射波係数が符号を反対にして入れ替わった形となっていることがわかる .

次に heave は固定であるが , 反対称運動である sway ($j = 1$) と roll ($j = 3$) を free とした場合について考えてみよう . この時 (3.92) , (3.121) 式によって

$$\begin{aligned} \zeta_B &\equiv -iK(\xi_1 H_1^+ + \xi_3 H_3^+) \\ &= -iK\{(X_G + \theta \overline{OG})H_1^+ + \theta \ell_w H_1^+\} = -iK(X_G + \ell_n \theta)H_1^+ \end{aligned} \quad (4.18)$$

であるから , (3.139) 式によって次式を得る .

$$\begin{aligned} B &\equiv \frac{1}{2} \frac{H_1^+}{H_1^+} - iK \left\{ \left(\frac{X_1}{a} \right) H_1^+ + \left(\frac{X_3}{a} \right) H_3^+ \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{H_1^+}{H_1^+} - i \frac{(H_{1F}^+)^2}{1 + i|H_{1F}^+|^2} = \frac{1}{2} \frac{H_1^+}{H_1^+} \frac{1 - i|H_{1F}^+|^2}{1 + i|H_{1F}^+|^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

したがって

$$C_R = \frac{1}{2} \left[\frac{H_2^+}{H_2^+} + \frac{H_1^+}{H_1^+} \frac{1 - i|H_{1F}^+|^2}{1 + i|H_{1F}^+|^2} \right] \quad (4.20)$$

$$C_T = \frac{1}{2} \left[\frac{H_2^+}{H_2^+} - \frac{H_1^+}{H_1^+} \frac{1 - i|H_{1F}^+|^2}{1 + i|H_{1F}^+|^2} \right] \quad (4.21)$$

となる . これは以前と同様に位相差だけを用いて表すことができる . すなわち , (3.133) , (3.140) 式から

$$\tan^{-1}|H_{1F}^+|^2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_Q = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_S - \delta_X$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} C_R &= -\frac{1}{2} (e^{i2\varepsilon_H} - e^{i2\delta_X}) = -i \sin(\varepsilon_H - \delta_X) e^{i(\varepsilon_H + \delta_X)} \\ C_T &= -\frac{1}{2} (e^{i2\varepsilon_H} + e^{i2\delta_X}) = -\cos(\varepsilon_H - \delta_X) e^{i(\varepsilon_H + \delta_X)} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

となることがわかる .

ここで同調時について考えてみよう . この時には (3.141) 式で示されたように $\alpha_Q = 0$, すなわち $\delta_X = \varepsilon_S$ であるから (4.22) 式より直ちに次式を得る .

$$\left. \begin{aligned} C_{R,\text{reso}} &= -i \sin(\varepsilon_H - \varepsilon_S) e^{i(\varepsilon_H + \varepsilon_S)} = T \\ C_{T,\text{reso}} &= -\cos(\varepsilon_H - \varepsilon_S) e^{i(\varepsilon_H + \varepsilon_S)} = R \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

これは heave の同調時における (4.17) 式と符号が反対となっているだけである .

最後に sway, heave, roll のすべてが free となった一般的な場合について考えてみよう . この時の反射波係数 , 透過波係数は (4.12) , (4.13) 式と (4.20) , (4.21) 式から直ちに求めることができ次式となる .

$$C_R = \mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2} \left[\frac{H_2^+}{H_2^+} \frac{1 - i|H_{2E}^+|^2}{1 + i|H_{2E}^+|^2} + \frac{H_1^+}{H_1^+} \frac{1 - i|H_{1F}^+|^2}{1 + i|H_{1F}^+|^2} \right] \quad (4.24)$$

$$C_T = \mathcal{A} - \mathcal{B} = \frac{1}{2} \left[\frac{H_2^+}{H_2^+} \frac{1 - i|H_{2E}^+|^2}{1 + i|H_{2E}^+|^2} - \frac{H_1^+}{H_1^+} \frac{1 - i|H_{1F}^+|^2}{1 + i|H_{1F}^+|^2} \right] \quad (4.25)$$

これを位相差だけで表してみると，

$$\left. \begin{aligned} C_R &= \frac{1}{2}(e^{i2\delta_Y} + e^{i2\delta_X}) = \cos(\delta_Y - \delta_X) e^{i(\delta_Y + \delta_X)} \\ C_T &= \frac{1}{2}(e^{i2\delta_Y} - e^{i2\delta_X}) = i \sin(\delta_Y - \delta_X) e^{i(\delta_Y + \delta_X)} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

となることがわかる．この式から浮体の動揺を完全に自由にした場合でもエネルギー保存則

$$|C_R|^2 + |C_T|^2 = 1 \quad (4.27)$$

が成り立っていることは明らかである．またエネルギー等分配則 $|C_R \pm C_T| = 1$ が成り立つことも (4.26) 式から容易に確かめることができる．

これまでに求めてきた透過波係数の式を用いれば，完全反射あるいは完全透過の条件を求めることは容易である．浮体の動揺が free の場合には (4.26) 式より

$$\left. \begin{aligned} \text{完全反射: } \delta_Y - \delta_X &= n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ \text{完全透過: } \delta_Y - \delta_X &= \frac{\pi}{2} + n\pi \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

である．すなわち heave と sway (あるいは roll) の位相の差が 0 または π の時，完全反射が実現されることがわかる．

4.3 波漂流力

これまでは入射波振幅，浮体の動揺振幅が小さいと仮定した上で，それらの 1 次の項だけを考える，いわゆる線形理論だけを論じてきた．波漂流力は，実は入射波振幅の 2 乗に比例する 2 次の流体力のうちの定常成分である．ここで高次理論である漂流力について敢えて述べるのは，2 次の定常流体力の計算には高次の境界値問題を解く必要がなく，線形速度ポテンシャルだけから求められ，また後で示されるように，波漂流力が反射波係数と関連深いためである．

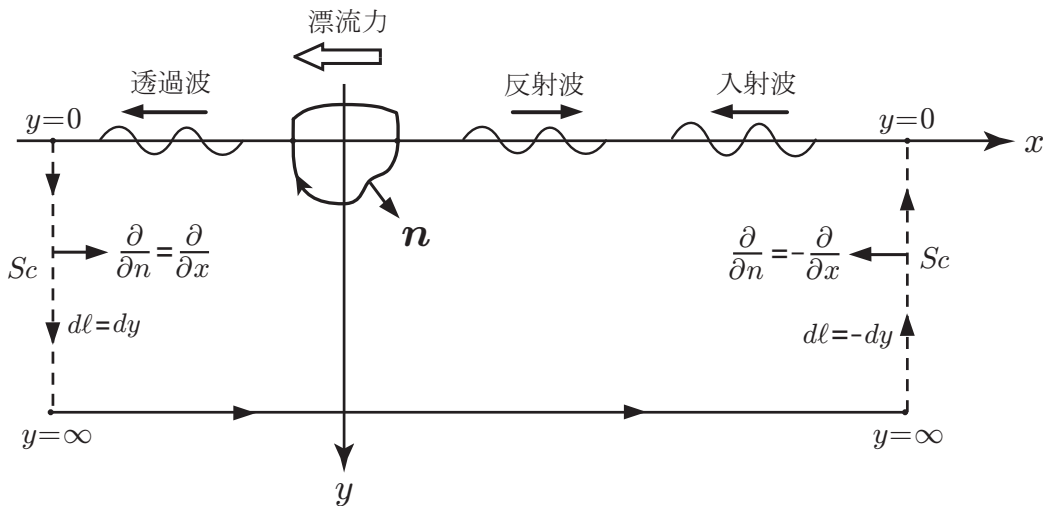


Fig. 4.2 漂流力の解析

さて，Fig. 4.2 に示された流体領域に対して運動量保存則を適用してみよう．浮体は左右対称でなくともよい．入射波は x 軸の正方向から来るものとする．漂流力は入射波の進行方向に働く場合 (Fig. 4.2 では x 軸の負の方向) を正と定義し， F_D と表す．

運動量保存の原理は 1.5 節で既に示されているが, Fig. 4.2 と法線の向きが反対であることに注意する. この時 (1.42) 式を 2 次的に考えて次式を得る.

$$F_D = - \int_{S_C} [p n_x + \rho u_x u_n] dl \quad (4.29)$$

ここで p は圧力, u_x, u_n は流速の x 軸成分及び法線成分である.

$$p = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - gy \right] \quad (4.30)$$

$$\left. \begin{aligned} u_x u_n &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 n_x \\ \eta_{\pm\infty} &= \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{y=0, x=\pm\infty} \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

などを (4.29) 式に代入し, $O(\Phi^2)$ の項までを考えると次式のようになる.

$$\begin{aligned} F_D &= \rho \left[\int_0^{\eta_\infty} - \int_0^{\eta_{-\infty}} \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - gy \right) dy + \frac{\rho}{2} \int_0^\infty dy \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \rho g (\overline{\eta_\infty^2} - \overline{\eta_{-\infty}^2}) + \frac{\rho}{2} \int_0^\infty dy \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} \end{aligned} \quad (4.32)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \text{Re} \{ \phi(x, y) e^{i\omega t} \} \\ \eta_{\pm\infty} &= \text{Re} \{ a_{\pm\infty} e^{i\omega t} \} \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

と表して代入し, 時間平均の計算を (1.77) 式によって実行すると, (4.32) 式は次式となる.

$$\begin{aligned} F_D &= \frac{1}{4} \rho g \text{Re} \{ a_\infty a_\infty^* - a_{-\infty} a_{-\infty}^* \} \\ &\quad + \frac{\rho}{4} \text{Re} \int_0^\infty dy \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} \end{aligned} \quad (4.34)$$

ここで $x = +\infty$ では入射波と反射波が存在し, $x = -\infty$ では透過波が存在するから

$$\text{at } x = +\infty \quad a_\infty = a e^{iKx} + \zeta_R e^{-iKx}, \quad \phi = \frac{g}{i\omega} e^{-Ky} a_\infty \quad (4.35)$$

$$\text{at } x = -\infty \quad a_{-\infty} = \zeta_T e^{iKx}, \quad \phi = \frac{g}{i\omega} e^{-Ky} a_{-\infty} \quad (4.36)$$

と表すことができる. 但し, ζ_T, ζ_R は複素数と考えるべきである.

$x = +\infty$ での計算は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \omega e^{-Ky} (a e^{iKx} - \zeta_R e^{-iKx}), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = i\omega e^{-Ky} (a e^{iKx} + \zeta_R e^{-iKx}) \\ a_\infty a_\infty^* &= (a e^{iKx} + \zeta_R e^{-iKx})(a e^{-iKx} + \zeta_R^* e^{-iKx}) \\ &= a^2 + |\zeta_R|^2 + 2 \text{Re}(a \zeta_R e^{-i2Kx}) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} F_D^\infty &\equiv \frac{1}{4} \rho g \text{Re}(a_\infty a_\infty^*) + \frac{1}{4} \rho \text{Re} \int_0^\infty dy \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right]_{x=+\infty} \\ &= \frac{1}{4} \rho g (a^2 + |\zeta_R|^2) + \frac{1}{2} \rho g \text{Re}(a \zeta_R e^{-i2Kx}) \\ &\quad + \frac{1}{4} \rho g \frac{1}{2} \left[a^2 + |\zeta_R|^2 - 2 \text{Re}(a \zeta_R e^{-i2Kx}) - \{ a^2 + |\zeta_R|^2 + 2 \text{Re}(a \zeta_R e^{-i2Kx}) \} \right] \\ &= \frac{1}{4} \rho g (a^2 + |\zeta_R|^2) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$x = -\infty$ での計算は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \omega e^{-Ky} \zeta_T e^{iKx}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = i\omega e^{-Ky} \zeta_T e^{iKx}, \quad a_{-\infty} a_{-\infty}^* = |\zeta_T|^2$$

したがって

$$\begin{aligned} F_D^{-\infty} &\equiv \frac{1}{4} \rho g \operatorname{Re}(a_{-\infty} a_{-\infty}^*) + \frac{\rho}{4} \operatorname{Re} \int_0^\infty dy \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right]_{x=-\infty} \\ &= \frac{1}{4} \rho g |\zeta_T|^2 + \frac{1}{4} \rho g \frac{1}{2} \{ |\zeta_T|^2 - |\zeta_T|^2 \} \\ &= \frac{1}{4} \rho g |\zeta_T|^2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

(4.34) 式に代入すると次式を得る .

$$\begin{aligned} F_D &= F_D^\infty - F_D^{-\infty} = \frac{1}{4} \rho g (a^2 + |\zeta_R|^2 - |\zeta_T|^2) \\ &= \frac{1}{4} \rho g a^2 (1 + |C_R|^2 - |C_T|^2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

ところでエネルギー保存則として (4.16) 式を知っているので上式に代入すると , 最終的に次のような結果が得られる .

$$\frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho g a^2} \equiv F'_D = |C_R|^2 \quad (4.40)$$

すなわち波漂流力 (の無次元値) は反射波係数の 2 乗で与えられることがわかる . これは正の値であるから , 入射波を反射させながら波下側 (入射波の進行方向) に流されていくことになる .

消波堤のように透過波を小さくし , 波を殆ど反射させてしまうように設計された浮体では , (4.40) 式が示すように , 反射性能が良い浮体ほど漂流力も大きく , したがって係留索などにかかる張力も大きくなることに注意しなければならない .

ところで (4.39) 式から (4.40) 式を導く過程でエネルギー保存則を用いたが , 次節で述べるように , 外部力学系による波エネルギー吸収など , エネルギー消散がある場合のエネルギー関係式はどうなるであろうか . エネルギー消散を ΔE と表すと , (1.36) 式によって

$$\begin{aligned} \Delta E &= -\rho \left[\int_{S_\infty} + \int_{S_{-\infty}} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl \\ &= -\frac{1}{4} \rho \omega \operatorname{Im} \int_0^\infty dy \left[\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial x} - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} \end{aligned} \quad (4.41)$$

となる . ここで

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{g}{i\omega} e^{-Ky} (a e^{iKx} + \zeta_R e^{-iKx}) \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial x} &= \omega e^{-Ky} (a e^{-iKx} - \zeta_R^* e^{iKx}) \end{aligned} \right\} \text{as } x \rightarrow +\infty \quad (4.42)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{g}{i\omega} e^{-Ky} \zeta_T e^{iKx} \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial x} &= \omega e^{-Ky} \zeta_T^* e^{-iKx} \end{aligned} \right\} \text{as } x \rightarrow -\infty \quad (4.43)$$

であるから , これらを用いて (4.41) 式の計算をすると次式が得られる .

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{4} \frac{\rho g \omega}{K} (a^2 - |\zeta_R|^2 - |\zeta_T|^2) \\ &= \frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{\omega}{K} (1 - |C_R|^2 - |C_T|^2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

もちろん $\Delta E = 0$ の場合には，既に用いてきたエネルギー保存則 $|C_R|^2 + |C_T|^2 = 1$ が得られる．また $\Delta E \neq 0$ の場合には

$$\eta \equiv \frac{\Delta E}{E_W} = 1 - |C_R|^2 - |C_T|^2, \quad E_W = \frac{1}{4} \rho g a^2 \frac{\omega}{K} \quad (4.45)$$

であるから，これを (4.39) 式に代入すると，(4.40) 式の一般化として次式が得られる．

$$\frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho g a^2} = F'_D = |C_R|^2 + \frac{1}{2} \eta \quad (4.46)$$

この式によれば，仮にエネルギーを完全吸収して $C_R = 0$ を実現できたとしても，波漂流力はゼロにはならないことがわかる．

4.4 左右対称浮体による消波・波吸収理論

左右対称の浮体が動揺している時の反射波係数，透過波係数は (4.9)，(4.10) 式で与えられる．ここでは j モードの動揺の複素振幅 ξ_j が運動方程式の解として与えられるのではなく，強制的に動かす（制御する）ことによって反射波も透過波もゼロにしてしまう，すなわち消波する方法について考える．

(4.9)，(4.10) 式のままでも良いが，(3.105) 式に示したように，対称波成分，反対称波成分に分けて考える．

$$\text{対称波成分} = \frac{1}{2} (C_R + C_T) = \frac{1}{2} \frac{H_2^+}{H_2^+} - iK \left(\frac{Y}{a} \right) H_2^+ \quad (4.47)$$

$$\text{反対称波成分} = \frac{1}{2} (C_R - C_T) = \frac{1}{2} \frac{H_1^+}{H_1^+} - iK \left(\frac{X_G + \ell_n \Theta}{a} \right) H_1^+ \quad (4.48)$$

ここで (4.48) 式には (4.18) 式の結果を代入している．

さて，反射波，透過波をゼロにするということは，対称波成分，反対称波成分をゼロにするということでもあるから，上式より動揺の複素振幅は次のようになっていけばよいことがわかる．

$$Y = \frac{1}{2} \frac{a}{iK \overline{H_2^+}} = \frac{1}{2} \frac{a}{A_H} e^{i\varepsilon_H} \quad (4.49)$$

$$X_G + \ell_n \Theta = \frac{1}{2} \frac{a}{iK \overline{H_1^+}} = \frac{1}{2} \frac{a}{A_S} e^{i\varepsilon_S} \quad (4.50)$$

(4.49) 式は heave の同調時における複素振幅（これは (3.116) 式で与えられている）の $1/2$ の値となっている．同様に (4.50) 式は (3.141) 式で与えられている反対称運動の同調時での値の $1/2$ であることがわかる．

次に (4.49)，(4.50) 式の条件が実際問題としてどのようにすれば実現できるかについて考えてみよう．まず (4.49) 式について考える．

Fig. 4.3 の左図のような外部力学系を考える（これは理想化して書いたものであり，実際にはもっと複雑である．）この系の慣性力係数，減衰力係数，復原力係数をそれぞれ， μ_2 ， ν_2 ， κ_2 と表すと，運動方程式は次のように表すことができる．

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 \ddot{y} + \nu_2 \dot{y} + \kappa_2 y &= -R \\ (m + A_{22}) \ddot{y} + B_{22} \dot{y} + \rho g B y &= E_2 e^{i\omega t} + R \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

$$\text{したがって} \quad (m + A_{22} + \mu_2) \ddot{y} + (B_{22} + \nu_2) \dot{y} + (\rho g B + \kappa_2) y = E_2 e^{i\omega t} \quad (4.52)$$

$$\text{ここで} \quad B_{22} = \rho \omega |H_2^+|^2, \quad E_2 = \rho g a H_2^+$$

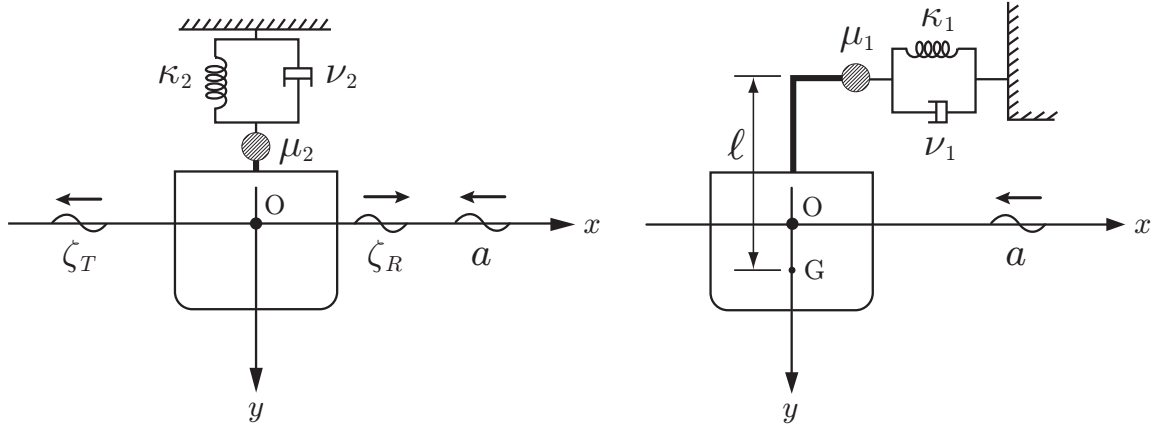


Fig.4.3 左右対称浮体による波吸収問題

さらに

$$\left. \begin{aligned} \nu_2 &\equiv \beta_2 B_{22} = \beta_2 \rho \omega |H_2^+|^2 \\ \rho g B + \kappa_2 - \omega^2 (m + A_{22} + \mu_2) &\equiv \rho \omega^2 E^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

とおくと, (3.107), (3.114) 式と同様にして $y = Y e^{i\omega t}$ の複素振幅 Y は次式となる.

$$KY = \frac{a H_2^+}{E^2 + i(1 + \beta_2) |H_2^+|^2} \quad (4.54)$$

この式が (4.49) 式となるためには $E = 0, \beta_2 = 1$ となっていればよいことがわかる. すなわち, (4.53) 式から, 外部力学系の κ_2, μ_2 を調節して浮体の動揺を同調させ, 更に外部減衰係数 ν_2 を浮体の造波減衰係数に等しくすればよい.

この条件は次のように言い換えることができる. まずそれぞれの力学系において“力学インピーダンス”

$$\left. \begin{aligned} Z_{22} &\equiv B_{22} + \frac{1}{i\omega} \{ \rho g B - \omega^2 (m + A_{22}) \} \\ Z_2^e &\equiv \nu_2 + \frac{1}{i\omega} \{ \kappa_2 - \omega^2 \mu_2 \} \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

を定義する. この時 $E = 0, \beta_2 = 1 (B_{22} = \nu_2)$ という条件は

$$\bar{Z}_{22} = Z_2^e \quad (4.56)$$

と表すことができる. これをインピーダンスの共役整合という. ただし \bar{Z}_{22} は Z_{22} の複素共役である.

ところで, この力学的インピーダンスを用いると, (4.54) 式に対応する式は次のように表すことができる.

$$(Z_{22} + Z_2^e) i\omega Y = E_2 \quad (4.57)$$

浮体は入射波の対称波成分を (4.49) 式の条件によって吸収できたが, そのエネルギーによって系外に仕事をしたはずである. その吸収エネルギーを知るために, ここで浮体が系外になした仕事率を計算してみよう. (4.54), (4.56) 式などを用いて

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \nu_2 \dot{y} dy = \frac{1}{2} \nu_2 \omega^2 |Y|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\omega} \right)^2 \nu_2 |KY|^2 = \frac{1}{2} \nu_2 \frac{|E_2|^2}{|Z_{22} + Z_2^e|^2} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$= E_W \frac{2\beta_2 |H_2^+|^4}{|E^2 + i(1 + \beta_2) |H_2^+|^2|^2} \quad (4.59)$$

$$\text{ここで} \quad E_W = \frac{1}{2} \rho g a^2 c_g = \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{g}{2\omega} = \frac{1}{4} \frac{\rho g^2 a^2}{\omega} \quad (4.60)$$

となる．ここで (4.60) 式の E_W は単位時間あたりに単位幅の入射波が有するエネルギーである．((1.80) 式参照のこと) $E = 0, \beta_2 = 1$ の時には (4.59) 式より

$$W_2 = \frac{1}{2} E_W \quad (4.61)$$

となっていることがわかる．すなわち，対称運動を制御することによって，入射波が単位時間あたりに有するエネルギーの半分が吸収できたことになる．残りの半分は反対称運動を制御することによって得られるであろうと予想できるが，それは後で示す．

ところで (4.59) 式を β_2 の関数 (但し $\beta_2 > 0$) として考えてみると，その最大値は $E = 0, \beta_2 = 1$ の時であることがわかる．すなわち，完全消波状態の時に吸収した波エネルギーも最大となっているのである．力学的インピーダンスを用いて表した (4.58) 式は，2次元理論に限ったことではなく，3次元理論へも拡張して考えることができることをここで注意しておく．

Fig. 4.3 の右図のような外部力学系を付加した時の浮体の反対称運動について考えておこう．重心 G から l の位置に外部力学系による反力がかかると考えると，

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 (\ddot{x}_G + l\ddot{\phi}) + \nu_1 (\dot{x}_G + l\dot{\phi}) + \kappa_1 (x_G + l\phi) &= -R_1 \\ (m + A_{11}) \ddot{x}_G + B_{11} \dot{x}_G + A_{11} l_m \dot{\phi} + B_{11} l_n \dot{\phi} &= \rho g a H_1^+ e^{i\omega t} + R_1 \\ (I + I_R) \ddot{\phi} + B_{11} l_n^2 \dot{\phi} + W \overline{GM} \phi + A_{11} l_m \ddot{x}_G + B_{11} l_n \dot{x}_G &= \rho g a H_1^+ l_n e^{i\omega t} + R_1 l \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

したがって

$$\begin{aligned} (m + A_{11} + \mu_1) \ddot{x}_G + (B_{11} + \nu_1) \dot{x}_G + \kappa_1 x_G \\ + (A_{11} l_m + \mu_1 l) \ddot{\phi} + (B_{11} l_n + \nu_1 l) \dot{\phi} + \kappa_1 l \phi &= \rho g a H_1^+ e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} (I + I_R + \mu_1 l^2) \ddot{\phi} + (B_{11} l_n^2 + \nu_1 l^2) \dot{\phi} + (W \overline{GM} + \kappa_1 l^2) \phi \\ + (A_{11} l_m + \mu_1 l) \ddot{x}_G + (B_{11} l_n + \nu_1 l) \dot{x}_G + \kappa_1 l x_G &= \rho g a H_1^+ l_n e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.64)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &\equiv \beta_1 B_{11} = \beta_1 \rho \omega |H_1^+|^2 \\ \kappa_1 - \omega^2 (m + A_{11} + \mu_1) &\equiv \rho \omega^2 S^2 \\ \kappa_1 l - \omega^2 (A_{11} l_m + \mu_1 l) &\equiv \rho \omega^2 Q^2 l_n \\ \kappa_1 l^2 + W \overline{GM} - \omega^2 (I + I_R + \mu_1 l^2) &\equiv \rho \omega^2 R^2 l_n^2 \\ F^2 &= (S^2 R^2 - Q^4) / (S^2 + R^2 - 2Q^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

とおくと，(3.139) 式を求めたのと同様にして次式が得られる．

$$K(X_G + l_n \Theta) = \frac{a H_1^+}{F^2 + i(1 + \beta_1 l / l_n) |H_1^+|^2} \quad (4.66)$$

そこで (4.50) 式となるためには $F = 0, \beta_1 l / l_n = 1$ とすればよいことがわかる．そしてこの時，浮体が単位時間あたりに系外に対してなす仕事率は，

$$W_1 = E_W \frac{2\beta_1 |H_1^+|^4}{|F^2 + i(1 + \beta_1 l / l_n) |H_1^+|^2|} \longrightarrow \frac{1}{2} E_W \quad (4.67)$$

となり，(4.61) 式より

$$(W_1 + W_2)_{\max} = E_W \quad (4.68)$$

となって波のエネルギーが完全吸収できたことになる．

しかし上記のような方法では，対称運動と反対称運動の両方に対して最適な制御をしなければならないので実用的にはかなり面倒である．そこで次に，強制動揺させても浮体の片側には波が発生しないという特殊な“片側波なし浮体”について考えてみる．

4.5 片側波なし浮体による消波・波吸収問題

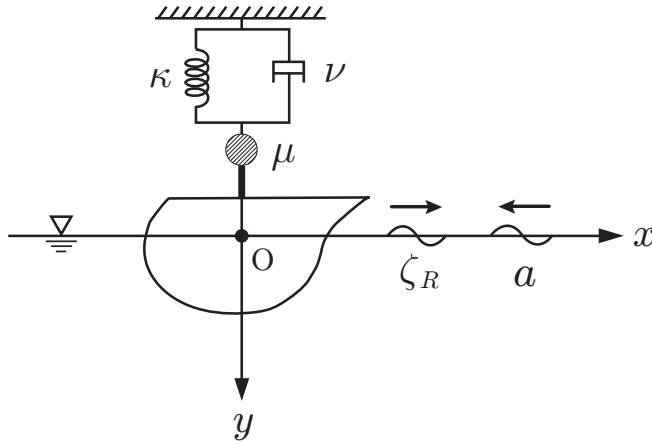


Fig. 4.4 片側波なし浮体による消波

片側波なし浮体は流線追跡法などに流体力学的な数値計算によって見出され得るものであり、一般には Fig. 4.4 のように左右非対称である。したがって前節の議論は直接には適用できないことに注意すべきである。

ここでは簡単のため、heave に対する波なし浮体を考えよう。そして図のように外部力学系を考え、その慣性力係数を μ 、減衰力係数を ν 、復原力係数を κ とする。この時の運動方程式は (4.52) 式と同様な形の次式

$$(m + A_{22} + \mu) \ddot{y} + (B_{22} + \nu) \dot{y} + (\rho g B + \kappa) y = E_2 e^{i\omega t} \quad (4.69)$$

である。ここで考えている波なし浮体は x 軸の負方向に波を発生しないものとしよう。すなわち $H_2^-(K) = 0$ である。この時 (3.68) 式より

$$B_{22} = \frac{1}{2} \rho \omega \left\{ |H_2^+|^2 + |H_2^-|^2 \right\} = \frac{1}{2} \rho \omega |H_2^+|^2 \quad (4.70)$$

また (3.79) 式より

$$E_2 = \rho g a H_2^+ \quad (4.71)$$

であり、(3.83) 式は

$$H_2^+ = \overline{H_2^+} R + \overline{H_2^-} T = \overline{H_2^+} R \quad (4.72)$$

となる。(4.72) 式より $|R| = 1$ であるからエネルギー保存則 (3.74) 式より $|T| = 0$ であることがわかる。すなわち、波なし浮体は運動が固定されている時でも波を透過させない (x 軸の負方向に波を発生させない) ことがわかる。このことを考慮すると、(3.46)、(3.49) 式より、左右非対称浮体が heave している時の反射波、透過波は

$$C_R = R - iK \left(\frac{Y}{a} \right) H_2^+ = \frac{H_2^+}{H_2^+} - iK \left(\frac{Y}{a} \right) H_2^+ \quad (4.73)$$

$$C_T = T - iK \left(\frac{Y}{a} \right) H_2^- = 0 \quad (4.74)$$

と表すことができる。(4.69) 式に (4.70)、(4.71) 式を代入し、さらに

$$\left. \begin{aligned} \nu &\equiv \beta B_{22} = \beta \frac{1}{2} \rho \omega |H_2^+|^2 \\ \rho g B + \kappa - \omega^2 (m + A_{22} + \mu) &\equiv \rho \omega^2 E^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

と記号を定義すると、 $y = Y e^{i\omega t}$ とおいた時の複素振幅 Y は次式となる。

$$KY = \frac{a H_2^+}{E^2 + i(1 + \beta) \frac{1}{2} |H_2^+|^2} \quad (4.76)$$

したがって (4.73) 式より

$$C_R = \frac{H_2^+}{H_2^+} - i \frac{(H_2^+)^2}{E^2 + i(1 + \beta) \frac{1}{2} |H_2^+|^2} \quad (4.77)$$

と表すことができる．この式から $E = 0, \beta = 1$ ならば $C_R = 0$ となることがわかる．(4.74) 式より， $C_T = 0$ でもあるからこの条件の時に完全消波状態となっていることになる．

この時に系外に吸収された単位時間当たりのエネルギーは，(4.59) 式より

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\omega} \right)^2 \nu |KY|^2 = E_W \frac{\beta |H_2^+|^4}{|E^2 + i(1+\beta)\frac{1}{2}|H_2^+|^2|^2} \rightarrow E_W \quad (4.78)$$

である．すなわち片側波なし形状であれば単一モードの運動（ここでは heave）だけで波エネルギーの完全吸収ができるのである．これは制御の観点からすれば非常に有利であるが，入射波の波長が変われば波なし浮体形状も変化するはずであるから，より広い周波数範囲の波に対して吸収効率を高めるためにはさらに工夫が必要である．

そこで次に，左右対称浮体を用いて片側波なしの条件を実現させる方法について考えてみよう．

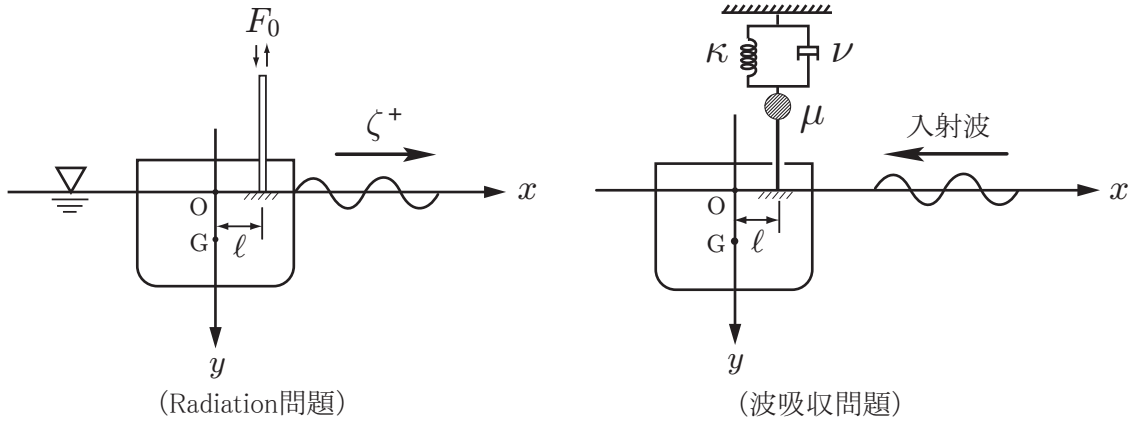


Fig. 4.5 左右対称浮体による片側波なし条件

4.6 左右対称浮体による片側波なし条件

Fig. 4.5 の左図のように，heaving と rolling を同時に与えるように y 軸から l だけ離れたところを F_0 なる力で強制動揺させる問題について考える（強制力を加える場所はもっと一般的に (x_0, y_0) として考えるべきであろう．その時には原点が sway 速度 $y_0\phi$ を持つために解析が複雑となるので，ここでは簡単のために l だけをパラメータとして解説する．）

この時の運動方程式は，(4.57) 式にならって力学的インピーダンスを用いると

$$\left. \begin{aligned} Z_2 i\omega Y &= F_0 \\ Z_3 i\omega \Theta &= F_0 l \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

と表すことができる．ここで力学的インピーダンス Z_2, Z_3 は次のように書くことができる．

$$\begin{aligned} Z_2 &= B_{22} + \frac{1}{i\omega} \{ \rho g B - \omega^2 (m + A_{22}) \} \\ &= \rho\omega \{ |H_2^+|^2 - iE^2 \} = \rho\omega |H_2^+|^2 \sec \alpha_H e^{-i\alpha_H} \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} Z_3 &= B_{33} + \frac{1}{i\omega} \{ W\overline{GM} - \omega^2 (I + I_R) \} \\ &= \rho\omega \ell_w^2 \{ |H_1^+|^2 - iR^2 \} = \rho\omega \ell_w^2 |H_1^+|^2 \sec \alpha_R e^{-i\alpha_R} \end{aligned} \quad (4.81)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \rho g B - \omega^2 (m + A_{22}) &\equiv \rho\omega^2 E^2, & \tan \alpha_H &= \frac{E^2}{|H_2^+|^2} \\ W\overline{GM} - \omega^2 (I + I_R) &\equiv \rho\omega^2 \ell_w^2 R^2, & \tan \alpha_R &= \frac{R^2}{|H_1^+|^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.82)$$

強制動揺による無限遠での進行波は (3.18) 式で与えられるので, x 軸の負方向に出ていく波 ζ^- について考えてみよう.

$$\begin{aligned}\zeta^- &= \zeta_2^- + \zeta_3^- = iK\{YH_2^- + \Theta H_3^-\} = -iK\{YH_2^+ - \Theta \ell_w H_1^+\} \\ &= -\frac{\omega}{g}F_0\left[\frac{H_2^+}{Z_2} - \ell\frac{\ell_w H_1^+}{Z_3}\right]\end{aligned}\quad (4.83)$$

したがって片側波なし, すなわち $\zeta^- = 0$ であるためには ℓ は次式となっていればよい.

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{Z_3 H_2^+}{Z_2 \ell_w H_1^+} = \ell_w \frac{\bar{H}_1^+ \sec \alpha_R}{H_2^+ \sec \alpha_H} e^{i(\alpha_H - \alpha_R)} \\ &= \ell_w \frac{\bar{A}_S \sec \alpha_R}{\bar{A}_H \sec \alpha_H} e^{i(\alpha_H - \alpha_R) + i(\varepsilon_H - \varepsilon_S)}\end{aligned}\quad (4.84)$$

この ℓ は実数でなければならないので, 片側波なしの条件は次式であることがわかる.

$$\alpha_H - \alpha_R + \varepsilon_H - \varepsilon_S = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.85)$$

この条件式は, 動揺の位相を用いて表すこともできる. すなわち (3.115) 式より $\alpha_H + \varepsilon_H = \delta_Y$, 同様に (3.140) 式より $\alpha_R + \varepsilon_S = \delta_X = \delta_\phi$ である (sway が連成していないので $\alpha_Q = \alpha_R$) から,

$$\delta_Y - \delta_X = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.86)$$

である. これは (4.28) 式に示した, 左右対称浮体による完全反射の条件でもある. すなわち全反射する反射装置は直ちに片側波なしを実現することが可能なのである!

浮体形状が与えられると, (4.85) 式の $\varepsilon_H, \varepsilon_S$ は決定されてしまうので, (4.85) 式を実現させるためには α_H, α_R を調節するということになる. これは実際には係留索などを付加して復原力を変化させ, (4.82) 式の E, R を調節することで可能である.

片側波なし状態の時の, 反対側の波振幅 ζ^+ を求めてみると

$$\begin{aligned}\zeta^+ &= \zeta_2^+ + \zeta_3^+ = -iK\{YH_2^+ + \Theta \ell_w H_1^+\} \\ &= -F_0 \frac{2e^{i\alpha_H}}{\rho g \bar{H}_2^+ \sec \alpha_H} = -F_0 2i \frac{K}{\rho g} \frac{e^{i(\alpha_H + \varepsilon_H)}}{\bar{A}_H \sec \alpha_H}\end{aligned}\quad (4.87)$$

となっている. この式から強制力 F_0 を与える式は次式となることがわかる.

$$F_0 = -\frac{1}{2}\rho g \zeta^+ \bar{H}_2^+ \sec \alpha_H e^{-i\alpha_H} = i \frac{\rho g \zeta^+}{2K} \bar{A}_H \sec \alpha_H e^{-i(\alpha_H + \varepsilon_H)} \quad (4.88)$$

以上のようにして片側波なし状態が実現できたので, 後は片側波なし浮体による波吸収問題と同様に考えればよい. すなわち Fig. 4.5 の右図に示したように, (4.84), (4.85) 式で与えられる ℓ の位置に外部力学系を接続し, κ, μ を調節して浮体の運動を同調させ, 外部減衰係数 ν を浮体の造波減衰係数に等しくすればよい. しかしこのことをもう少し詳しく見るために Fig. 4.5 のような波吸収問題を考えよう.

外部力学系と浮体との間に働く反力を F_1 とする. この時浮体の運動方程式は, 波浪強制力も考えるので次式となる.

$$Z_2 i\omega Y = \rho g a H_2^+ + F_1 \quad (4.89)$$

$$Z_3 i\omega \Theta = \rho g a \ell_w H_1^+ + F_1 \ell \quad (4.90)$$

$$\left[\nu + \frac{1}{i\omega}(\kappa - \omega^2 \mu)\right] i\omega Y \equiv Z_2^e i\omega Y = -F_1 \quad (4.91)$$

ここで Z_2, Z_3 は (4.80), (4.81) 式で与えられる力学的インピーダンスである．波の対称波成分が完全吸収されるためには，複素振幅 Y は (4.49) 式である必要がある．この時の反力 F_1 を (4.89) 式から求めてみると

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{ga}{2\omega} \frac{Z_2}{\bar{H}_2^+} - \rho ga H_2^+ = -\rho ga \frac{|H_2^+|^2 + iE^2}{2\bar{H}_2^+} \\ &= -\frac{1}{2} \rho ga H_2^+ \sec \alpha_H e^{i\alpha_H} = -i \frac{\rho ga}{2K} \bar{A}_H \sec \alpha_H e^{i(\alpha_H + \epsilon_H)} \end{aligned} \quad (4.92)$$

である．また (4.90) 式からも F_1 が計算できるが，片側波なしの条件 (4.84), (4.85) 式が成り立ち，且つ波の反対称成分が完全吸収されるための条件 (4.50) 式が成り立つ時には，(4.92) 式と全く同じ結果になることが確かめられる．したがって，(4.91) 式の F_1 が (4.92) 式に等しくなるよう μ, ν, κ を調節すれば，波エネルギーの完全吸収が達成できることになる．

その条件とは既に (4.56) 式として与えられている，インピーダンスの共役整合，

$$\left. \begin{aligned} Z_2^e &= \bar{Z}_2 \\ \text{すなわち } \nu &= B_{22} = \rho\omega |H_2^+|^2, \quad \kappa - \omega^2 \mu = -\rho\omega^2 E^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.93)$$

である．この時 (4.91), (4.80) 式などから F_1 が (4.92) 式と等しいことは容易に確かめることができる．

ここで注意したいことは (4.92) 式は強制動揺による片側波なし状態の時の反力 F_0 (これは (4.88) 式で与えられる) と複素共役の関係にある，すなわち $F_1 = \bar{F}_0$ が成り立つということである．これは物理的にどういうことかということ，時間項が $e^{i\omega t}$ であったことに注意すれば

$$\text{Re} [F_1 e^{i\omega t}] = \text{Re} [\bar{F}_0 e^{i\omega t}] = \text{Re} [F_0 e^{-i\omega t}] \quad (4.94)$$

となるから，radiation 問題において時間を逆にしたら，波吸収問題と同じことを考えていることになるということである．すなわち可逆性が成り立っているのである．

上述のことから，波浪強制力に対する Haskind-Newman の関係がそうであったように，波エネルギー吸収理論においても，実は diffraction 問題を考える必要はなく，radiation 問題を考えるだけで十分なのである．

4.7 エネルギー吸収理論再考

このことを別の方法によってもう少し解説することにしよう．まず 4.3 節の波漂流力の計算に関連して説明したように，エネルギー吸収を行っている時のエネルギー関係式は次のように表すことができる．

$$\frac{\Delta E}{E_W} \equiv \eta = 1 - |C_R|^2 - |C_T|^2 \quad (4.95)$$

ここで

$$E_W = \frac{1}{2} \rho ga^2 \frac{\omega}{2K} = \frac{1}{2} \rho ga^2 c_g \quad (4.96)$$

は (4.60) 式で示したように，単位時間あたりに単位幅の入射波が有するエネルギーであり，したがって (4.95) 式の η はエネルギー吸収における効率と考えることができる．

ところで，透過波係数，反射波係数に関しては，(3.46), (3.49) 式より

$$C_R = R - iK X_j H_j^+, \quad C_T = T - iK X_j H_j^- \quad (4.97)$$

と表すことができる．ただし X_j は X_j/a のことであり，簡単のために $j = 1 \sim 3$ に関する和の記号は省略している．また (3.83) 式ならびに浮体が固定されているときのエネルギー保存則 (3.73) 式より

$$\bar{H}_j^+ R + \bar{H}_j^- T = H_j^+ \quad (4.98)$$

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (4.99)$$

などが知られている .

(4.97) 式より

$$\left. \begin{aligned} |C_R|^2 &= |R|^2 - iKX_jH_j^+\bar{R} + iK\bar{X}_j\bar{H}_j^+R + |KX_jH_j^+|^2 \\ |C_T|^2 &= |T|^2 - iKX_jH_j^-\bar{T} + iK\bar{X}_j\bar{H}_j^-T + |KX_jH_j^-|^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.100)$$

これを (4.95) 式に代入し , (4.98) , (4.99) 式を考慮すると , 次式を得る .

$$\begin{aligned} \eta &= 2 \operatorname{Re}\{iKX_j\bar{H}_j^+\} - K^2|X_j|^2(|H_j^+|^2 + |H_j^-|^2) \\ &\equiv 2 \operatorname{Re}(\gamma) - \frac{|\gamma|^2}{1-\delta} \end{aligned} \quad (4.101)$$

ただし

$$\gamma \equiv iKX_j\bar{H}_j^+, \quad 1-\delta = \frac{|H_j^+|^2}{|H_j^+|^2 + |H_j^-|^2} > 0 \quad (4.102)$$

ここで δ は Kochin 関数だけで構成されているので , 浮体形状が与えられると一義的に決まるのに対して , γ は運動の複素振幅 X_j に関係しており , γ の値によって効率が変化する . そこで (4.101) 式を γ の関数と考えると , η の最大値は $\gamma = 1 - \delta$ のときであることがわかる . したがって最大吸収効率を与える式は

$$\eta_{\max} = \gamma_{\max} = 1 - \delta = \frac{|H_j^+|^2}{|H_j^+|^2 + |H_j^-|^2} \quad (4.103)$$

と表すことができる .

次に最大吸収効率のときの C_R , C_T について考えてみる . (4.103) 式のとき γ は実数であるから , (4.100) 式より

$$|C_R|^2 = |R|^2 - \bar{R}\gamma H_j^+/\bar{H}_j^+ - R\gamma\bar{H}_j^+/H_j^+ + \gamma^2 \quad (4.104)$$

である . 一方 , (4.98) , (4.99) 式より T を消去すると

$$|R|^2\{|H_j^+|^2 + |H_j^-|^2\} = R\bar{H}_j^{+2} + \bar{R}H_j^{+2} + |H_j^-|^2 - |H_j^+|^2 \quad (4.105)$$

である . これを (4.104) 式に代入し , (4.103) 式を考慮すると次式を得る .

$$|C_R|^2 = 1 - 2\gamma + \gamma^2 = (1 - \gamma)^2 = \delta^2 \quad (4.106)$$

$|C_T|$ の値は (4.95) 式に (4.103) , (4.106) 式を代入することによって次式となる .

$$|C_T|^2 = 1 - |C_R|^2 - \eta = \gamma(1 - \gamma) = (1 - \delta)\delta \quad (4.107)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} |C_R| &= 1 - \gamma = \delta \\ |C_T| &= \sqrt{\gamma(1 - \gamma)} = \sqrt{\delta(1 - \delta)} \end{aligned} \right\} \quad (4.108)$$

以上の結果を見ると , 浮体が固定されている場合 , 動揺している場合に関係なく , すべて radiation 問題における値だけで表されていることがわかる .

また (4.103) 式から , $H_j^- = 0$ となる片側波なし浮体を用いれば , 単一の j モードの運動だけで $\eta_{\max} = 1$ となることがわかる . このとき $\delta = 0$, $\gamma = 1$ であるから , (4.102) 式より

$$X_j = \frac{1}{iK\bar{H}_j^+} \quad (4.109)$$

を満たすように運動を制御すればよいことになる . (4.109) 式は同調時における複素振幅であり , (4.76) 式で考えたように , $E = 0$, $\beta = 1$ という条件を意味している . このとき (4.108) 式より $|C_R| = |C_T| = 0$ すなわち完全消波状態となっていることも明らかである .

また左右対称浮体の場合には , $H_j^+ = (-1)^j H_j^-$ の関係があるから , (4.103) 式より単一の運動モードでは $\eta_{\max} = 1/2$ であり , この結果も既に 4.4 節で述べたとおりである . なおこのとき , (4.108) 式より $|C_R| = |C_T| = 1/2$ となっている .

第 5 章 係留ラインと浮体の相互作用

浮遊式の海洋構造物は、一般にはワイヤーやチェーンなどの係留ラインによって係留されているので、潮流や波漂流力によってその位置が動くと、係留ラインによる係留力は復原力として働く。ここでは係留ラインの静的解析として知られているカテナリ（懸垂線）の理論を中心として解説する。

5.1 カテナリの理論

本節では浮遊式海洋構造物が長い係留ラインとシンカーによってゆるく係留されている場合について考える。このようなゆるい係留はスラック係留あるいはカテナリ（懸垂線）係留と呼ばれ、最も一般的なものである。カテナリの理論では次のような仮定がなされる。

a) 係留ラインの伸びは省略できる。b) 係留ラインには潮流、波などによる流体力は働かない。c) 係留ラインの自重は支持点間で一様に分布している。

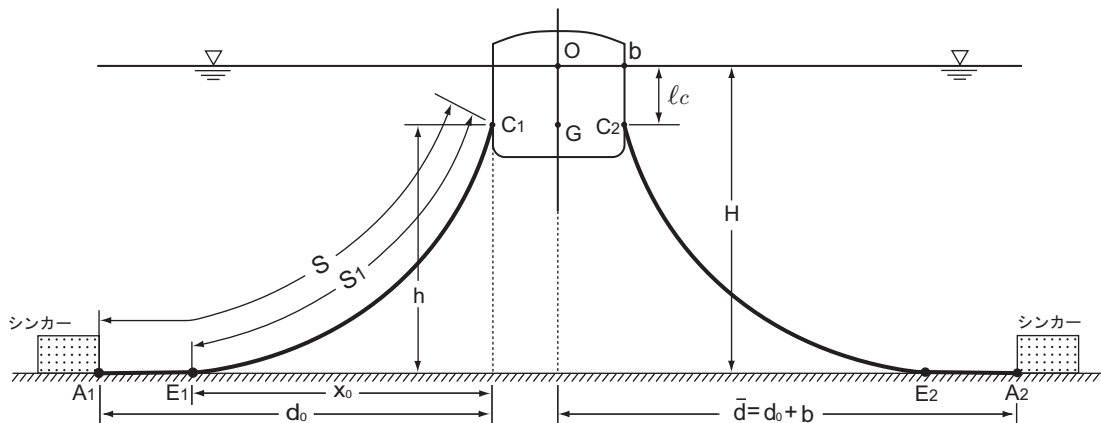


Fig. 5.1 標準的なカテナリ係留

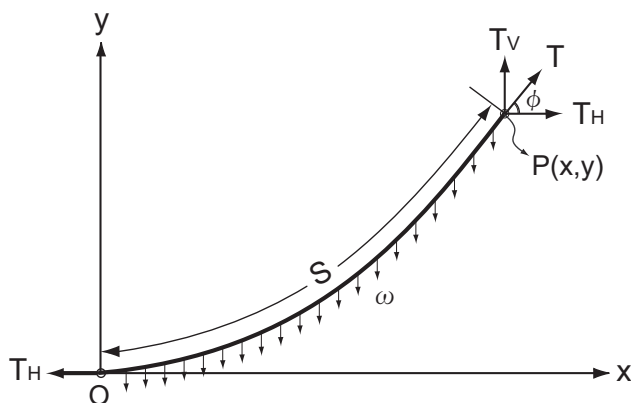


Fig. 5.2 カテナリ理論での座標系

カテナリ係留の最も標準的な状態を Fig. 5.1 に示す。一般に A_1E_1, A_2E_2 の部分は海底にあり、 E_1C_1, E_2C_2 の部分がいわゆるカテナリを形成する。カテナリの形状及び係留力との関係を解析するために Fig. 5.2 のような座標系を考える。O 点は Fig. 5.1 の E_1 に相当する点で x 軸と勾配ゼロで接するものとする。そこから鉛直上向きに y 軸を取る。

係留ライン上の任意の点を $P(x, y)$ とし、そこでの張力を T 、その x, y 軸方向成分を T_H, T_V とする。また、係留ラインの単位長さあたりの水中重量を ω とし、 OP 間の長さを S と表す。

この時, x, y 軸方向の力の釣り合いから次式が成り立つ.

$$T_H = T \cos \phi \quad (5.1)$$

$$T_V = \omega S = T \sin \phi = T_H \tan \phi \quad (5.2)$$

ここで ϕ は Fig. 5.2 に示すように点 P における係留ラインの傾斜であり

$$\frac{dy}{dx} = \tan \phi \equiv z \quad (5.3)$$

の関係がある. (5.2) 式の如く $T_V = \omega S$ と表されるから, T_H もこれと同じ形で表すために, 等価長さ a を導入して次のように書く.

$$T_H \equiv \omega a \quad (5.4)$$

したがって (5.2) 式より

$$S = a \tan \phi = a z \quad (5.5)$$

となる. (5.4) 式で ω は与えられる量であるから, a を求めることは T_H を求めることと同じであることに注意しよう. さて, (5.5) 式の両辺を x で微分すると, (5.3) 式を用いて

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{\cos \phi} = \sqrt{1 + \tan^2 \phi} = \sqrt{1 + z^2} = a \frac{dz}{dx} \quad (5.6)$$

を得る. これは z に関する微分方程式であるから積分し, $x = 0$ で $z = dy/dx = 0$ を考慮すると

$$\frac{x}{a} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \sinh^{-1} z$$

したがって

$$z = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x}{a} = \tan \phi \quad (5.7)$$

となる. これを更に x について積分し, $x = 0$ で $y = 0$ を考慮すると次式を得る.

$$y = a \left(\cosh \frac{x}{a} - 1 \right) \quad (5.8)$$

また (5.5), (5.7) 式より

$$S = a \sinh \frac{x}{a} \quad (5.9)$$

と表すことができる. (5.7)~(5.9) 式は, ϕ, y, S が全て x の関数として与えられていることに注意したい. したがって張力 T, T_V なども x の関数として与えられる. しかし, ϕ, S, T などが y の関数として与えられた方が便利なこともある. これらは次のようにして求められる.

まず (5.8), (5.9) 式から x を消去すると

$$(y + a)^2 - S^2 = a^2$$

したがって

$$S = \sqrt{y(y + 2a)} \quad (5.10)$$

(5.8), (5.9) 式より

$$x = a \cosh^{-1} \left(\frac{y + a}{a} \right) = a \sinh^{-1} \left(\frac{S}{a} \right) \quad (5.11)$$

(5.2), (5.4) 式より

$$T = \sqrt{T_H^2 + T_V^2} = \omega a \cosh \frac{x}{a} = \omega (y + a) \quad (5.12)$$

したがって

$$\sin \phi = \frac{T_V}{T} = \frac{S}{y + a}, \quad \cos \phi = \frac{T_H}{T} = \frac{a}{y + a} \quad (5.13)$$

となることがわかる.

以上がカテナリ係留の計算に必要な基礎式である. カテナリの形状は (5.6) 式の微分方程式から求めたが, 係留ラインの長さ S を既知とする付帯条件のもとに, 係留ラインのもつポテンシャルエネルギー

ギーが最小となる時の形状としても求められる．すなわち変分法におけるオイラーの方程式からも同じ結果が得られる．

さて，Fig. 5.1 に示したような初期平衡状態における係留点 C_1 での張力を求める方法について考えよう．シンカー（ A_1 点）から係留点 C_1 までの水平距離を d_0 ，垂直距離を h ，係留ラインの全長を S とし，これらは既知であるとする．さらに浮体の重量 W ，及び浮力 Δ_0 も既知であるとする．

カタナリ部分の長さを S_1 ，水平距離を x_0 ，水平張力を $T_H = \omega a$ と表すと，次の関係式が成立する．
(5.9) 式より

$$S_1 = S - (d_0 - x_0) = a \sinh \frac{x_0}{a} \quad (5.14)$$

(5.8) 式より

$$h = a \left(\cosh \frac{x_0}{a} - 1 \right) \quad (5.15)$$

$$\Delta_0 - W = n T_V = n \omega a \sinh \frac{x_0}{a} \quad (5.16)$$

(5.16) 式は，浮体が n 本の係留ラインで係留されていると仮定して，力の釣り合いから求めたものであり， T_V は (5.2)，(5.4)，(5.7) 式を用いて表している．

さて (5.14)，(5.15) 式から

$$\frac{h}{S - d_0} = \frac{\cosh \frac{x_0}{a} - 1}{\sinh \frac{x_0}{a} - \frac{x_0}{a}} = \frac{\cosh k - 1}{\sinh k - k} \equiv \alpha_1 \quad (5.17)$$

なる関係を得ることができるから，既知の S ， d_0 ， h から α_1 を求め，上式を満たす $k = x_0/a$ を数値的に，または図式的に求めることができる． $k = x_0/a$ が求まれば，(5.15) 式から a の値がわかり， $x_0 = ak$ から x_0 の値がわかる．また (5.16) 式から ωa の値，すなわち水平張力 T_H が求まるから T_V ， T_H から C_1 点での張力 T が計算できることになる．

5.2 定常風あるいは定常流がある時の係留ライン

風，潮流，波などが存在すると浮体は水平，上下方向に移動するとともに傾斜を生じる．Fig. 5.3 のように重心 G が水平方向に x_G ，上下方向に y_G 移動し，更に θ 傾斜した状態で新しい平衡状態になったとして考えよう．この時，係留点の座標は，Fig. 5.3 を参照すると

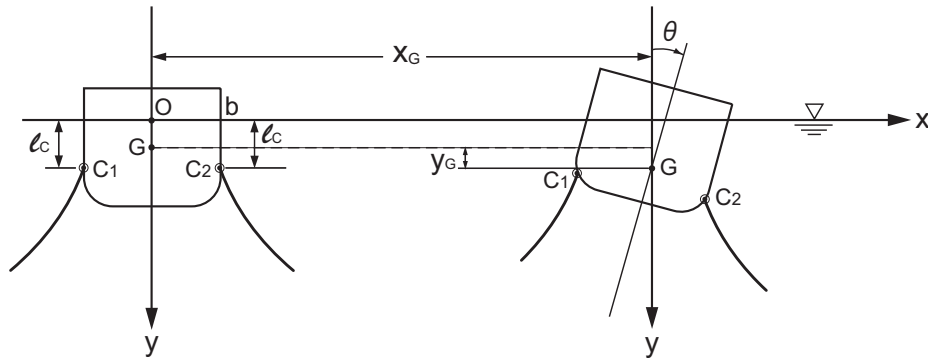


Fig. 5.3 浮体の係留点の移動距離

- a) 移動前は $(\mp b, l_C)$
a) 移動後は $(x_G \mp b \cos \theta - (l_C - \overline{OG}) \sin \theta, y_G + \overline{OG} + (l_C - \overline{OG}) \cos \theta \mp b \sin \theta)$
 $\approx (x_G \mp b - (l_C - \overline{OG}) \theta, y_G + l_C \mp b \theta)$ (5.18)

である．ただし複号は C_1 ， C_2 に対応している．

沈下量 y_G は係留ラインによって引き起こされた準定常的なものであるから，それに伴う浮力，排水量の変化，更には \overline{GM} の変化をも考慮しておく必要がある．すなわち係留ラインの存在によって浮体の運動は非線形となり，かなり複雑である．

浮力の変化量 $\delta\Delta$ は，水線面積を A_W (2次元問題では $A_W = B = 2b$) とすると

$$\left. \begin{aligned} \delta\Delta &= \rho g A_W y_G \\ \text{この時排水容積 } V \text{ は} \quad \rho g V &= \Delta_0 + \delta\Delta \\ \text{新しい } \overline{GM} \text{ は} \quad \overline{GM} &= \overline{BM} - \overline{OB} + \overline{OG} \\ &= \frac{I_W}{V} - \left(\overline{OB}_0 + \frac{y_G}{2} \right) + \overline{OG} \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

として計算できる．ただし I_W は水線面2次モーメント， \overline{OB}_0 は初期状態での浮心位置を表す．排水量， \overline{GM} が変化したので，rollの復原モーメントも次式として計算しなければならない．

$$(\Delta_0 + \delta\Delta) \overline{GM} \sin \theta \approx (\Delta_0 + \delta\Delta) \overline{GM} \theta \quad (5.20)$$

さて，浮体が移動して新しい平衡状態になったので係留ラインの状態も変化しているはずである．それが Fig. 5.4 のようになったとして解析しよう． A_1 点は水平な海底面に接しているとは限らないとする．したがって左の係留ライン A_1C_1 はカテナリ的一部分である．

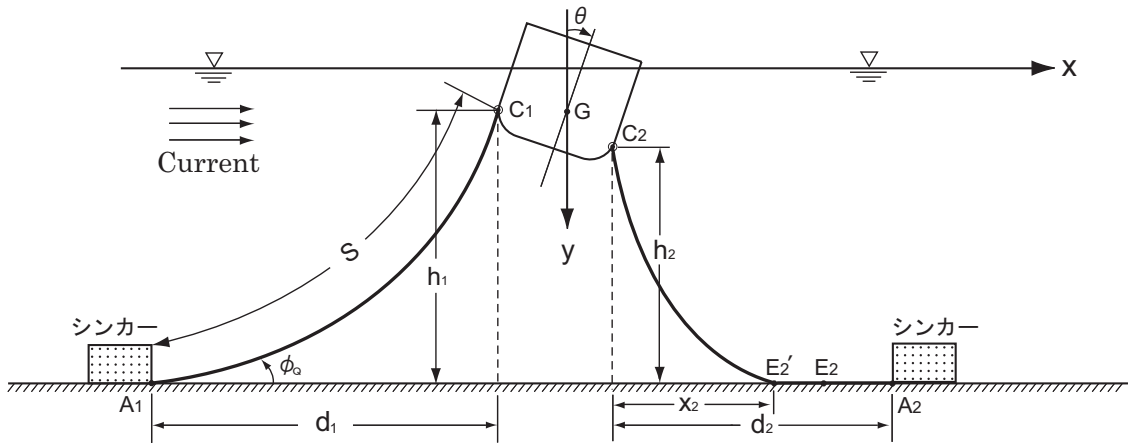


Fig. 5.4 浮体移動後の係留ライン

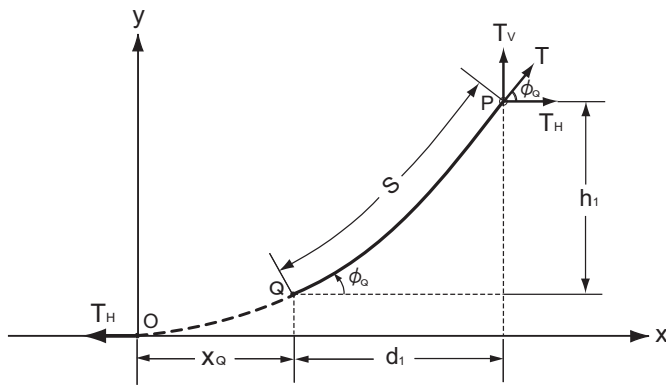


Fig. 5.5 カテナリ理論の座標系その2

一方右側の係留ラインは海底に這っていた部分 A_2E_2 が A_2E_2' まで長くなり， C_2E_2' がカテナリを形成している．左側の係留ラインを解析するために Fig. 5.5 を考えよう．

P , Q はそれぞれ Fig. 5.4 の C_1 , A_1 に対応している．Fig. 5.5 のように PQ をカテナリ的一部分とみなして延長していけば，ある点で水平面と勾配ゼロで接するであろう．この点を図のように O として座標の原点とする．この座標系で P , Q の座標を (x_P, y_P) , (x_Q, y_Q) とし， P , Q での接

線と x 軸とのなす角をそれぞれ ϕ_P, ϕ_Q と表す．また OP, OQ のカテナリの長さを S_P, S_Q とする．この時 Fig. 5.5 に示された d_1, h_1, S は次式で与えられる．

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= x_P - x_Q \\ h_1 &= y_P - y_Q \\ S &= S_P - S_Q \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

ここで d_1, h_1 は後で示されるように，(5.18) 式で与えられる係留点の位置変化量から陰的にはあるが計算できるものであることに注意しよう．もちろん S は初期状態での値と同じである．

さて，カテナリの高さ y_P, y_Q は (5.8) 式から，カテナリの長さ S_P, S_Q は (5.9) 式から求められるので (5.21) 式より， h_1, S は次式で与えられることになる．

$$h_1 = a \left(\cosh \frac{x_P}{a} - \cosh \frac{x_Q}{a} \right) = 2a \sinh \left(\frac{2x_Q + d_1}{2a} \right) \sinh \frac{d_1}{2a} \quad (5.22)$$

$$S = a \left(\sinh \frac{x_P}{a} - \sinh \frac{x_Q}{a} \right) = 2a \cosh \left(\frac{2x_Q + d_1}{2a} \right) \sinh \frac{d_1}{2a} \quad (5.23)$$

したがって
$$S^2 - h_1^2 = 4a^2 \sinh^2 \frac{d_1}{2a} \quad (5.24)$$

S_1, h_1, d は与えられると考えるので，これから (5.17) 式に対応する式として次式を得ることができる．

$$\frac{S^2 - h_1^2}{d_1^2} = \left(\frac{\sinh \frac{d_1}{2a}}{\frac{d_1}{2a}} \right)^2 = \left(\frac{\sinh \kappa}{\kappa} \right)^2 \equiv \alpha_2 \quad (5.25)$$

(5.17) 式の α_1 と同様に， S, h_1, d_1 から α_2 を求め，上式から数式的あるいは図式的に $\kappa = d_1/2a$ を求めることができる．したがって a が，すなわち $T_H = \omega a$ が求まる．したがって T_V, T は

$$\left. \begin{aligned} T_V &= \omega a \sinh \left(\frac{x_Q + d_1}{a} \right) \\ T &= \sqrt{T_H^2 + T_V^2} = \omega a \cosh \left(\frac{x_Q + d_1}{a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

として計算できることになる (x_Q は (5.22) または (5.23) 式から求まるであろう.)

以上の計算手順を Fig. 5.4 の状態に適用してみよう．まず左側の係留ラインについては， h_1, d_1 が (5.18) 式から次のように与えられる．

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \bar{d} + e_1 - \delta_1 = d_0 + b + e_1 - \delta_1 \\ h_1 &= h + e_2 + \delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

$$\text{ただし} \quad \left. \begin{aligned} e_1 &= x_G - (\ell_C - \overline{OG}) \sin \theta, & \delta_1 &= b \cos \theta \\ e_2 &= -y_G + (\ell_C - \overline{OG})(1 - \cos \theta), & \delta_2 &= b \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

したがって (5.25), (5.26) 式によって C_1 点での張力 $T_1 = (T_{H1}, T_{V1})$ が求まることになる．

次に Fig. 5.5 の右側の係留ラインについては，

$$\left. \begin{aligned} d_2 &= \bar{d} - e_1 - \delta_1 = d_0 + b - e_1 - \delta_1 \\ h_2 &= h + e_2 - \delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

として d_2, h_2 が求まるが，これは Fig. 5.1 に示した初期平衡状態での d_0, h に相当するものである．したがって S, d_2, h_2 より張力を求める手順は (5.17) 式と同じである．再記すると

$$\frac{h_2}{S - d_2} = \frac{\cosh \frac{x_2}{a_2} - 1}{\sinh \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_2}{a_2}} = \frac{\cosh k - 1}{\sinh k - k} \equiv \alpha_1 \quad (5.30)$$

$$h_2 = a_2 \left(\cosh \frac{x_2}{a_2} - 1 \right) \quad (5.31)$$

である．すなわち， S, d_2, h_2 から $k = x_2/a_2$ を (5.30) 式で求め，(5.31) 式から a_2 を，また $x_2 = k a_2$ から x_2 を求める．そして張力は

$$\left. \begin{aligned} T_{H2} &= \omega a_2, & T_{V2} &= \omega a \sinh \frac{x_2}{a_2} \\ T_2 &= \sqrt{T_{H2}^2 + T_{V2}^2} = \omega a \cosh \frac{x_2}{a_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

として計算できることがわかる．

しかし，(5.27)，(5.29) 式から明らかなように，張力は浮体の移動量 (x_G, y_G, θ) の関数として与えられるので，これらを決定しなければならない．それは，カテナリ理論が静的解析であることから，以下に示す力の釣り合い式によってなされると考えるべきであろう．

x, y 軸方向の定常流体力を F_x, F_y ，定常傾斜モーメントを M_θ とすると，

$$F_x + T_{H2} = T_{H1} \quad (5.33)$$

$$F_y + W + T_{V1} + T_{V2} = \Delta_0 + \delta\Delta \quad (5.34)$$

$$M_\theta = (\Delta_0 + \delta\Delta) \overline{GM} \sin \theta + M_C \quad (5.35)$$

が成り立つ． $\delta\Delta, \overline{GM}$ は (5.19) 式で与えられている．また M_C は係留ラインによる復原モーメントであり，次のように計算することができる (Fig. 5.6 参照のこと)

$$\begin{aligned} M_C &= T_{V1} \{ b \cos \theta + (\ell_C - \overline{OG}) \sin \theta \} - T_{V2} \{ b \cos \theta - (\ell_C - \overline{OG}) \sin \theta \} \\ &\quad + T_{H1} \{ b \sin \theta - (\ell_C - \overline{OG}) \cos \theta \} + T_{H2} \{ b \sin \theta + (\ell_C - \overline{OG}) \cos \theta \} \end{aligned} \quad (5.36)$$

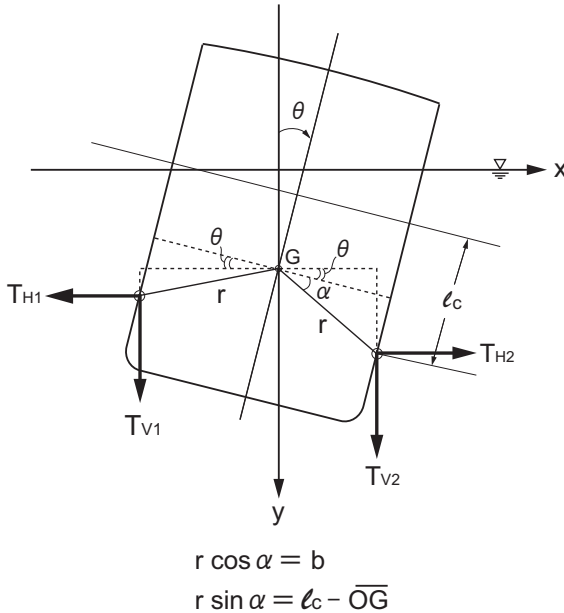


Fig. 5.6 復原モーメントの計算

結局，(5.33)，(5.34)，(5.35) 式は未知数 x_G, y_G, θ が複雑に入り組んだ非線型の方程式となっているが，未知数 3 個に対して方程式 3 個であるから原理的には解を求めることができる．

しかし，以上に述べてきた方法は静的な解析法であることに注意しなければならない．係留ラインに働く流体力の影響，係留ラインの動的変動張力の影響などを考慮した解析法が必要となることもある．これについては小寺山によって，実用的観点からの近似計算法が提案されている．その方法では係留ラインによる復原力を線形のばね定数で表す必要がある．そこで次に線形ばね定数の算出方法について述べることにしよう．

5.3 係留ラインによる復原力の線形ばね定数

ここでは単一の係留ラインの線形ばね定数を求める．Fig. 5.5 において $x_Q = 0$ とおけば，通常のカテナリとなるから，一般的に Fig. 5.5 の場合について考えよう．

線形ばね定数を次のように定義する .

$$dT_H = C_{xx} dd_1 + C_{xy} dh_1 \quad (5.37)$$

$$dT_V = C_{yx} dd_1 + C_{yy} dh_1 \quad (5.38)$$

ここで T_H, T_V は (5.26) 式 , あるいは (5.1) , (5.2) 式によって次のように表すことができる .

$$\left. \begin{aligned} T_H &= \omega a \\ T_V &= \omega \left(S + a \sinh \frac{x_Q}{a} \right) = \omega (S + a \tan \phi_Q) \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

等価長さ a は d_1, h_1 の関数と考えられるから , 線形ばね定数は次のように計算すればよい . まず $h_1 = \text{const}$ としておいて P 点を水平に dd_1 だけ動かすことにより次式の計算をする .

$$C_{xx} = \frac{dT_H}{da} \frac{da}{dd_1}, \quad C_{yx} = \frac{dT_V}{da} \frac{da}{dd_1} \quad (5.40)$$

次に $d_1 = \text{const}$ としておいて P 点を垂直に dh_1 だけ動かすことにより

$$C_{xy} = \frac{dT_H}{da} \frac{da}{dh_1}, \quad C_{yy} = \frac{dT_V}{da} \frac{da}{dh_1} \quad (5.41)$$

である . そこでまず (5.39) 式より , $S = \text{const}$ に注意して次式を用意しておく .

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_H}{da} &= \omega \\ \frac{dT_V}{da} &= \omega \left(\tan \phi_Q + a \sec^2 \phi_Q \frac{d\phi_Q}{da} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

次に $dh_1/da, dd_1/da$ を計算するために (5.22) , (5.23) 式を次のように変形する .

$$h_1 = a \left\{ \left(\cosh \frac{d_1}{a} - 1 \right) \sec \phi_Q + \sinh \frac{d_1}{a} \tan \phi_Q \right\} \quad (5.43)$$

$$S = a \left\{ \left(\cosh \frac{d_1}{a} - 1 \right) \tan \phi_Q + \sinh \frac{d_1}{a} \sec \phi_Q \right\} \quad (5.44)$$

ただし

$$\sinh \frac{x_Q}{a} = \tan \phi_Q, \quad \cosh \frac{x_Q}{a} = \sec \phi_Q \quad (5.45)$$

を用いている . なお (5.43) , (5.44) 式より次の関係があることに注意する .

$$S^2 - h_1^2 = 2a (h_1 \sec \phi_Q - S \tan \phi_Q) \quad (5.46)$$

さて (5.43) , (5.44) を a について微分する . この時

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{da} \left(\cosh \frac{d_1}{a} - 1 \right) &= \frac{1}{a} \sinh \frac{d_1}{a} \left(\frac{dd_1}{da} - \frac{d_1}{a} \right) \\ \frac{d}{da} \sinh \frac{d_1}{a} &= \frac{1}{a} \cosh \frac{d_1}{a} \left(\frac{dd_1}{da} - \frac{d_1}{a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

を用い , 更に ϕ_Q も a の関数であること , $S = \text{const}$ であることなどから次式を得ることができる .

$$\left. \begin{aligned} a \frac{dh_1}{da} - (S + a \tan \phi_Q) \frac{dd_1}{da} &= h_1 + a S \sec \phi_Q \frac{d\phi_Q}{da} - \frac{d_1}{a} (S + a \tan \phi_Q) \\ -(h_1 + a \sec \phi_Q) \frac{dd_1}{da} &= S + a h_1 \sec \phi_Q \frac{d\phi_Q}{da} - \frac{d_1}{a} (h_1 + a \sec \phi_Q) \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

そこで , まず $h_1 = \text{const}$ の場合を考えると , 上式から次の関係が得られる .

$$\frac{dd_1}{da} = \frac{d_1(S \sec \phi_Q - h_1 \tan \phi_Q) - (S^2 - h_1^2)}{a(S \sec \phi_Q - h_1 \tan \phi_Q)}$$

(5.46) 式より
$$\frac{dd_1}{da} = \frac{d_1(S - h_1 \sin \phi_Q) - 2a(h_1 - S \sin \phi_Q)}{a(S - h_1 \sin \phi_Q)} \quad (5.49)$$

$$\frac{d\phi_Q}{da} = \frac{\cos \phi_Q}{a} \frac{h_1 - S \sin \phi_Q}{S - h_1 \sin \phi_Q} \quad (5.50)$$

したがって (5.42) 式より

$$\frac{dT_V}{da} = \omega \frac{h_1 \cos \phi_Q}{S - h_1 \sin \phi_Q} \quad (5.51)$$

が得られる．これらを (5.40) 式に代入することによって次の結果となることがわかる．

$$C_{xx} = \omega \frac{a(S - h_1 \sin \phi_Q)}{d_1(S - h_1 \sin \phi_Q) - 2a(h_1 - S \sin \phi_Q)} \quad (5.52)$$

$$C_{yx} = \omega \frac{ah_1 \cos \phi_Q}{d_1(S - h_1 \sin \phi_Q) - 2a(h_1 - S \sin \phi_Q)} \quad (5.53)$$

次に $d_1 = \text{const}$ の場合について (5.48) 式を考えると，

$$\frac{d\phi_Q}{da} = \frac{\cos \phi_Q}{a^2 h_1} \{d_1(h_1 + a \sec \phi_Q) - aS\} \quad (5.54)$$

$$\frac{dh_1}{da} = \frac{d_1(S - h_1 \sin \phi_Q) - 2a(h_1 - S \sin \phi_Q)}{ah_1 \cos \phi_Q} \quad (5.55)$$

したがって
$$\frac{dT_V}{da} = \omega \frac{\sec \phi_Q}{ah_1} \{d_1(h_1 + a \sec \phi_Q) - a(S - h_1 \sin \phi_Q)\} \quad (5.56)$$

が得られる．これらを (5.41) 式に代入することによって次の結果が得られる．

$$C_{xy} = \omega \frac{ah_1 \cos \phi_Q}{d_1(S - h_1 \sin \phi_Q) - 2a(h_1 - S \sin \phi_Q)} = C_{yx} \quad (5.57)$$

$$C_{yy} = \omega \frac{d_1(h_1 + a \sec \phi_Q) - a(S - h_1 \sin \phi_Q)}{d_1(S - h_1 \sin \phi_Q) - 2a(h_1 - S \sin \phi_Q)} \quad (5.58)$$

(5.52) , (5.53) 式 , 及び (5.57) , (5.58) 式は更に次のように書き直すこともできる．すなわち

$$\frac{x_Q}{a} \equiv X, \quad \frac{d_1}{a} \equiv D \quad (5.59)$$

この時 (5.43) ~ (5.45) 式より

$$S - h_1 \sin \phi_Q = a \frac{\sinh D}{\cosh X} \quad (5.60)$$

$$h_1 - S \sin \phi_Q = a \frac{\cosh D - 1}{\cosh X} \quad (5.61)$$

$$h_1 \cos \phi_Q = a \frac{(\cosh D - 1) \cosh X + \sinh D \cdot \sinh X}{\cosh X} \quad (5.62)$$

$$h_1 + a \sec \phi_Q = a \{ \cosh D \cdot \cosh X + \sinh D \sinh X \} = a \cosh(D + X) \quad (5.63)$$

したがって最終結果は次のようになる．

$$C_{xx} = \omega \frac{\sinh D}{D \sinh D - 2(\cosh D - 1)} \quad (5.64)$$

$$C_{xy} = C_{yx} = \omega \frac{(\cosh D - 1) \cosh X + \sinh D \sinh X}{D \sinh D - 2(\cosh D - 1)} \quad (5.65)$$

$$C_{yy} = \omega \frac{D \cosh X \cosh(D + X) - \sinh D}{D \sinh D - 2(\cosh D - 1)} \quad (5.66)$$

C_{xx} は浮体が移動して $X \neq 0$ の状態になっても X には無関係であることがわかる． C_{xy} , C_{yx} , C_{yy} には $X = 0$ の時の値よりも大きくなることわかる．

ところで (5.64) ~ (5.66) 式には係留ラインによる復原モーメントの線形ばね定数が含まれていないので、次にそれについて考えよう。復原モーメント M_C は (5.36) 式で与えられているが、その中の張力は、既に求めた線形ばね定数 (5.64) ~ (5.66) 式を用いて次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} T_{H1} &= T_H + (x_1 + x_0) C_{xx} - (y_1 - y_0) C_{xy} \\ T_{V1} &= T_V + (x_1 + x_0) C_{yx} - (y_1 - y_0) C_{yy} \\ T_{H2} &= T_H - (x_2 - x_0) C_{xx} - (y_2 - y_0) C_{xy} \\ T_{V2} &= T_V - (x_2 - x_0) C_{yx} - (y_2 - y_0) C_{yy} \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

ここで T_H, T_V は浮体が傾斜していない状態（左右対称）の時の水平及び垂直方向の張力であり、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ は直立状態から θ だけ傾斜した時の係留点 C_1, C_2 の座標である。これは、(5.18) 式で $x_G = y_G = 0$ として与えられるから、 θ が小さい時

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_0 &= x_2 - x_0 = -(\ell_C - \overline{OG}) \theta \\ y_1 - y_0 &= -b \theta, \quad y_2 - y_0 = b \theta \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

である。(5.67), (5.68) 式を (5.36) 式に代入し、 θ に関して 1 次の項だけを取り出すと、

$$\begin{aligned} M_C &= 2 \left[(\ell_C - \overline{OG}) \{ T_V - b C_{xy} + (\ell_C - \overline{OG}) C_{xx} \} \right. \\ &\quad \left. + b \{ T_H - (\ell_C - \overline{OG}) C_{xy} + b C_{yy} \} \right] \theta + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (5.69)$$

を得ることができる。したがってこの式から復原モーメントの線形ばね定数は次式となることがわかる。

$$\begin{aligned} C_{\theta\theta} &= 2 \left[(\ell_C - \overline{OG}) \{ T_V - b C_{xy} + (\ell_C - \overline{OG}) C_{xx} \} \right. \\ &\quad \left. + b \{ T_H - (\ell_C - \overline{OG}) C_{xy} + b C_{yy} \} \right] \end{aligned} \quad (5.70)$$

第 6 章 複数浮体の流体力学的相互作用

双胴船や多胴型の海洋構造物などでは浮体間の相互干渉が重要となる．本解説では，単体としての各浮体の特性がわかっているならば，相互干渉の影響を計算することのできる，いわゆる相互干渉理論について説明する．

6.1 各要素浮体の散乱特性

相互干渉理論では他の浮体からの反射波は入射波と見なすので，“一般化された”入射波に対する各浮体の散乱特性がわかっていることが前提である．その計算法に関する説明は既に第 2 章で行ったが，後の便宜のために簡単に整理しておこう．

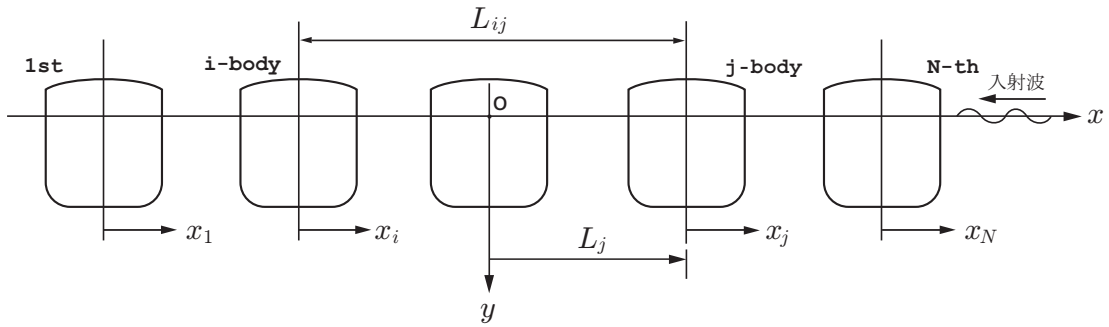


Fig. 6.1 複数浮体の記号と座標系

浮体の数，各浮体の形状は任意でよいが，ここでは説明を簡単化するために，各浮体は同一形状で左右対称と考えよう．この時，当然ながら diffraction 特性は，その浮体について分かっているならばよい．さて，速度ポテンシャルを次のように表す．

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \operatorname{Re} \left[\frac{ga}{i\omega} \{ \phi_I(x, y) + \phi_S(x, y) \} e^{i\omega t} \right] \\ \phi_D(x, y) &= \phi_I(x, y) + \phi_S(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

ϕ_I は入射波の速度ポテンシャルであり， ϕ_S は浮体による散乱波の速度ポテンシャル， ϕ_D は流場全体を表す diffraction ポテンシャルとする．

この時，速度ポテンシャルの支配方程式はラプラスの式であり，

$$[H] \quad \frac{\partial \phi_D}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_H \quad (6.2)$$

$$[F] \quad \frac{\partial \phi_D}{\partial y} + K \phi_D = 0 \quad \text{on } y = 0, \quad K = \frac{\omega^2}{g} \quad (6.3)$$

$$[B] \quad \frac{\partial \phi_D}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = h \quad (6.4)$$

の境界条件式を満たす．水深は $y = h$ としているが，後で $h \rightarrow \infty$ として考えてもよい．

さて，グリーンの公式を用いると， ϕ_D は入射波成分 ϕ_I を含むので，無限遠 (S_∞) での放射条件を満たしていないことに注意すれば次式を得る．

$$C \phi_D(P) + \int_{S_H} \phi_D(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P; Q) ds(Q) = \int_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial \phi_D(Q)}{\partial n_Q} - \phi_D(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \right\} G(P; Q) ds(Q) \quad (6.5)$$

この式の C は solid angle とわれ、その値は、点 $P(x, y)$ が流体領域内にある時は $C = 1$ 、滑らかな浮体表面上にある時は $C = 1/2$ である。また $G(P; Q)$ はグリーン関数であり、有限水深の場合には次のように与えられる。

$$G(P; Q) = i C_0 Y_0(y) Y_0(\eta) e^{-i k_0 |x - \xi|} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Y_n(y) Y_n(\eta) e^{-k_n |x - \xi|} \quad (6.6)$$

$$\text{ここで} \quad \left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{k_0}{K + h(k_0^2 - K^2)} & C_n &= \frac{k_n}{K - h(k_n^2 + K^2)} \\ Y_0(y) &= \frac{\cosh k_0(y - h)}{\cosh k_0 h}, & Y_n(y) &= \frac{\cos k_n(y - h)}{\cos k_n h} \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

$$k_0 \tanh k_0 h = \frac{\omega^2}{g} = K, \quad k_n \tan k_n h = -K \quad (6.8)$$

(6.8) 式は一定有限水深の場合の分散関係であり、 $h \rightarrow \infty$ では $k_0 = K$, $C_0 = 1$ となる。

ところで (6.5) 式の右辺を ϕ_S と ϕ_I に分けて考えると、 ϕ_S は放射条件を満たしており、 ϕ_I は浮体の存在には関係しないので、

$$0 = \int_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial \phi_S(Q)}{\partial n_Q} - \phi_S(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \right\} G(P; Q) ds(Q) \quad (6.9)$$

$$\phi_I(P) = \int_{S_\infty} \left\{ \frac{\partial \phi_I(Q)}{\partial n_Q} - \phi_I(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \right\} G(P; Q) ds(Q) \quad (6.10)$$

を得る。したがって、(6.5) 式の右辺は単に $\phi_I(P)$ と表すことができ、次式となる。

$$C \phi_D(P) + \int_{S_H} \phi_D(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P; Q) ds(Q) = \phi_I(P) \quad (6.11)$$

これは点 $P(x, y)$ が S_H 上にある時 ($C = 1/2$)、浮体表面上の ϕ_D に関する積分方程式と見ることができる。右辺の ϕ_I として必要な条件は、ラプラスの式、線形自由表面条件式 (6.3) を満足していることであり、必ずしも進行波でなくてもよい。

このような任意の“一般化された”入射波の場合でも、それに対する scattering ポテンシャル ϕ_S は (6.11) 式で $C = 1$ とおくことによって、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \phi_S(x, y) &= - \int_{S_H} \phi_D(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P; Q) ds(Q) \\ &= A_0^\pm Y_0(y) e^{\mp i k_0 x} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^\pm Y_n(y) e^{\mp k_n x} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\text{ここで} \quad \left. \begin{aligned} A_0^\pm &= -i C_0 \int_{S_H} \phi_D(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} Y_0(\eta) e^{\pm i k_0 \xi} ds(\xi, \eta) \\ A_n^\pm &= -C_n \int_{S_H} \phi_D(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} Y_n(\eta) e^{\pm k_n \xi} ds(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

であり、複号の上段は $x > 0$ 、下段は $x < 0$ に対応して取るものとする。

入射波の速度ポテンシャル ϕ_I がわかっている（陽な形で与えられている）時には、(6.13) 式の A_0^\pm , A_n^\pm はもちろん陽に計算できる。しかしながら本章で説明する相互干渉問題のように、複数浮体間の反射波を未知数のまま、ある浮体への入射波と見なして考える場合には陽には計算できない。

(6.12) 式の右辺第 1 項は、浮体の散乱による進行波成分を、第 2 項は局所波 (local wave または evanescent wave) を表している。これらを次のようなマトリックス形式で表すことにしよう。

$$\phi_S^i(x_i, y) = \{A_i\}^T \{\psi_S^i(x_i, y)\} \quad (6.14)$$

ここで，添字 i は i -th body での値という意味 (Fig. 6.1 参照) であり， $\{A_i\}^T$ は， $\{A_{i0}^+, A_{i0}^-, A_{in}^+, A_{in}^-\}$ ($n = 1, 2, \dots$) を要素とする未定係数マトリックス，また $\{\psi_S^i(x_i, y)\}$ は，

$$\{\psi_S^i(x_i, y)\} = \begin{cases} u(+x_i) Y_0(y) e^{-ik_0 x_i} \\ u(-x_i) Y_0(y) e^{ik_0 x_i} \\ u(+x_i) Y_n(y) e^{-k_n x_i} & n = 1, 2, \dots \\ u(-x_i) Y_n(y) e^{k_n x_i} & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.15)$$

を要素とする scattering ポテンシャルのマトリックスである．ただし， $\{\ }^T$ は転置マトリックス，また $u(x)$ は単位ステップ関数を表し， $x > 0$ の時 $u(x) = 1$ ， $x < 0$ の時 $u(x) = 0$ である．

ところで，(6.14)，(6.15) 式は厳密な表示式であるが，この散乱波が他の浮体に及ぼす影響を考える時，浮体が非常に近接している時以外は指数関数的減衰項のために local wave の影響は大変小さい．そこで実際には $n \geq 1$ の項は省略して，進行波成分だけを考えるのが実用的である．

6.2 複数浮体の diffraction 問題

まず，浮体が固定されており，Fig. 6.1 に示すように， x 軸の正方向から波が入射してくる場合 (diffraction 問題) を考えよう．この入射波の速度ポテンシャルは (6.1) 式のように規格化して

$$\phi_I(x, y) = Y_0(y) e^{ik_0 x} \quad (6.16)$$

と表される．これを j -th body の座標系で表すと， $x = x_j + L_j$ (L_j は Fig. 6.1 参照) であるから

$$\begin{aligned} \phi_I(x_j, y) &= e^{ik_0 L_j} Y_0(y) e^{ik_0 x_j} \\ &= \{0, e^{ik_0 L_j}\} \begin{Bmatrix} Y_0(y) e^{-ik_0 x_j} \\ Y_0(y) e^{ik_0 x_j} \end{Bmatrix} \equiv \{a_j\}^T \{\psi_I^j(x_j, y)\} \end{aligned} \quad (6.17)$$

となる． j -th body に入射してくる波には，上式の ϕ_I だけでなく，他の浮体からの反射波も含まれている．例えば j -th body による反射波は (6.14) 式であるが，それを j -th body の座標系で表してみると，

$$\left. \begin{aligned} u(+x_i) Y_0(y) e^{-ik_0 x_i} &= \delta_{ij} e^{-ik_0 L_{ij}} Y_0(y) e^{-ik_0 x_j} \\ u(-x_i) Y_0(y) e^{ik_0 x_i} &= \delta_{ji} e^{-ik_0 L_{ij}} Y_0(y) e^{ik_0 x_j} \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

となる．ただし δ_{ij} は

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i < j \text{ の時} \\ 0 & i > j \text{ の時} \end{cases} \quad (6.19)$$

を意味する記号であり， L_{ij} は Fig. 6.1 に示しているように， i -th body と j -th body との距離 (> 0) である．散乱波として，(6.15) 式中の local wave ($n \geq 1$ の項) を省略して考えると，

$$\begin{aligned} \{\psi_S^i(x_i, y)\} &= \begin{bmatrix} \delta_{ij} e^{-ik_0 L_{ij}}, & 0 \\ 0, & \delta_{ji} e^{-ik_0 L_{ij}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_0(y) e^{-ik_0 x_j} \\ Y_0(y) e^{ik_0 x_j} \end{Bmatrix} \\ &\equiv [T_{ij}] \{\psi_I^j(x_j, y)\} \end{aligned} \quad (6.20)$$

と表すことができる． $\{\psi_I^j(x_j, y)\}$ を構成する “一般化された” 入射波成分は，それぞれ j -th body の左 (x 軸の負方向)，及び右 (x 軸の正方向) から入射してくる単位振幅の進行波であることがわかる．

(6.20) 式を j -th body 以外のすべての浮体について考えれば，結局， j -th body に入射してくるすべての波は

$$\phi_I^j(x_j, y) = \left(\{a_j\}^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \{A_i\}^T [T_{ij}] \right) \{\psi_I^j(x_j, y)\} \quad (6.21)$$

である .

さて , $\{\psi_I^j(x_j, y)\}$ に対する , j -th body の散乱特性は , (6.11) 式の右辺に $\{\psi_I^j(x_j, y)\}$ を構成する “一般化された” 入射波成分を代入することによって , 単一浮体による通常の diffraction 問題と全く同じ計算によって求めることができる . 具体的には $\{\psi_I^j(x_j, y)\}$ に対する scattering ポテンシャルを $\{\psi_S^j(x_j, y)\}$, diffraction ポテンシャルを $\{\varphi_D^j(x_j, y)\}$ と表すと ,

$$\begin{aligned} \{\psi_S^j(x_j, y)\} &= \begin{bmatrix} i H_4^-(k_0), & i H_4^+(k_0) \\ i H_4^+(k_0), & i H_4^-(k_0) \end{bmatrix} \{\psi_I^j(x_j, y)\} \\ &\equiv [B]^T \{\psi_I^j(x_j, y)\} \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\text{ここで} \quad H_4^\pm(k_0) = -C_0 \int_{SH} \varphi_D^j(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} Y_0(\eta) e^{\pm i k_0 \xi} ds \quad (6.23)$$

と求めることができる . したがって (6.21) 式の入射波に対する j -th body による scattering ポテンシャルは ,

$$\phi_S^j(x_j, y) = \left(\{a_j\}^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \{A_i\}^T [T_{ij}] \right) [B]^T \{\psi_I^j(x_j, y)\} \quad (6.24)$$

である .

ところで scattering ポテンシャルは , (6.14) 式において $i = j$ とした式でも与えられるから , 両者は同じであるはずであり , したがって次の関係式を得ることができる .

$$\{A_j\}^T = \{a_j\}^T [B]^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \{A_i\}^T [T_{ij}] [B]^T \quad (6.25)$$

これを書き換えると , 未定係数マトリックス $\{A_j\}$ に関する連立方程式として次式を得ることができる .

$$\{A_j\} - [B] \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N [T_{ij}]^T \{A_i\} = [B] \{a_j\} \quad (j = 1 \sim N) \quad (6.26)$$

次に , 各浮体に働く波浪強制力の計算について考える . j -th body への入射波は (6.21) 式であるから , それによる波浪強制力の計算をすればよい . (6.26) 式を解くことによって (6.21) 式の振幅部分は求まるから , 結局 “一般化された” 入射波ベクトル $\{\psi_I^j(x_j, y)\}$ の各成分に対する波浪強制力が計算されていけばよい .

ところが (6.22) 式の $[B]$ を計算する過程で , 既に $\{\psi_I^j(x_j, y)\}$ に対する diffraction ポテンシャル $\{\varphi_D^j(x_j, y)\}$ は求まっているはずだから , それによって k -方向に働く流体力成分は

$$\{E_k^j\} = \int_{SH} \{\varphi_D^j(x_j, y)\} n_k ds \quad (6.27)$$

と計算できる . したがって j -th body に働く k 方向の波浪強制力は

$$W_k^j = \rho g a \left(\{a_j\}^T + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \{A_i\}^T [T_{ij}] \right) \{E_k^j\} \quad (6.28)$$

と表すことができる .

6.3 双胴浮体の diffraction 問題

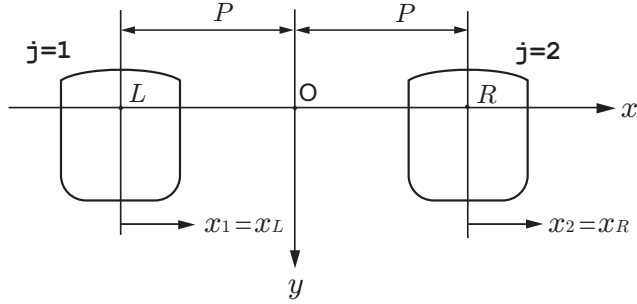


Fig. 6.2 双胴浮体の場合

前節で示した方法は浮体の個数には関係なく適用できるが、ここでは具体例としてもっとも簡単な $N = 2$ 、すなわち双胴浮体について考えてみよう。水深は無限大、すなわち $k_0 = K$, $C_0 = 1$ とする。

浮体間距離を Fig. 6.2 のように $L_{12} = 2P$ とする。また (6.17) 式に必要な L_j は $L_1 = -P$, $L_2 = P$ である。必要ならば、 x_1, x_2 の代わりに x_L, x_R の記号も用いることにする。

さて、(6.17), (6.20), (6.22) 式より

$$\{a_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e^{-iKP} \end{Bmatrix}, \quad \{a_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e^{iKP} \end{Bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} iH_4^-, & iH_4^+ \\ iH_4^+, & iH_4^- \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$[T_{12}]^T = \begin{bmatrix} e^{-i2KP} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T_{21}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-i2KP} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

であるから、(6.26) 式は具体的に次のようになる。

$$A_1^+ - iH_4^+ e^{-i2KP} A_2^- = iH_4^+ e^{-iKP} \quad (6.31)$$

$$A_1^- - iH_4^- e^{-i2KP} A_2^- = iH_4^- e^{-iKP} \quad (6.32)$$

$$A_2^+ - iH_4^- e^{-i2KP} A_1^+ = iH_4^+ e^{iKP} \quad (6.33)$$

$$A_2^- - iH_4^+ e^{-i2KP} A_1^+ = iH_4^- e^{iKP} \quad (6.34)$$

これらのうち、(6.31), (6.34) 式を連立させることによって A_1^+ と A_2^- を求めることができ、次の結果が得られる。

$$A_1^+ = \frac{iH_4^+ (1 + iH_4^-) e^{-iKP}}{1 + \{H_4^+ e^{-i2KP}\}^2} \quad (6.35)$$

$$A_2^- = -e^{iKP} + \frac{(1 + iH_4^-) e^{iKP}}{1 + \{H_4^+ e^{-i2KP}\}^2} \quad (6.36)$$

A_1^+ は浮体 L によって造波された波のうち、浮体 R の方向に進行する成分であり、浮体 R の座標で表すと、(6.18) 式によって

$$A_1^+ e^{-i2KP} \equiv D_R(K) = \frac{iH_4^+ (1 + iH_4^-) e^{-i3KP}}{1 + \{H_4^+ e^{-i2KP}\}^2} \quad (6.37)$$

となる。一方、 A_2^- は浮体 R によって造波された波のうち、浮体 L の方向に進行する成分であるが、元々の入射波も浮体 L の方向に進行する波に含めて考えることにすると、(6.17), (6.18) 式によって、浮体 L の座標系では

$$e^{-iKP} + A_2^- e^{-i2KP} \equiv D_L(K) = \frac{(1 + iH_4^-) e^{-iKP}}{1 + \{H_4^+ e^{-i2KP}\}^2} \quad (6.38)$$

と表すことができる。これらは大楠によって示された、無限反射の考え方による結果と当然ながら一致している。

A_1^+ , A_2^- が求まったので, 次にこれらを (6.32), (6.33) 式に代入すると

$$A_1^- = i H_4^- e^{-iKP} + i H_4^- A_2^- e^{-i2KP} = i H_4^- D_L(K) \quad (6.39)$$

$$A_2^+ = i H_4^+ e^{iKP} + i H_4^- A_1^+ e^{-i2KP} = i H_4^+ e^{iKP} + i H_4^- D_R(K) \quad (6.40)$$

が得られる.

以上で問題はすべて解けたことになるが, これらを使って反射波係数 (R), 透過波係数 (T) を求めてみよう. まず, 反射波係数は, $x \rightarrow +\infty$ での波振幅であるから, 双胴船全体の座標系 $0-xy$ で表すと,

$$\begin{aligned} R &= A_1^+ e^{-iKP} + A_2^+ e^{iKP} \\ &= i H_4^+ e^{i2KP} + (1 + i H_4^-) D_R(K) e^{iKP} \end{aligned} \quad (6.41)$$

一方, 透過波係数は, $x \rightarrow -\infty$ での波振幅を考えるので, 入射波も含めて定義して

$$\begin{aligned} T &= 1 + A_1^- e^{iKP} + A_2^- e^{-iKP} \\ &= (1 + i H_4^-) D_L(K) e^{iKP} \end{aligned} \quad (6.42)$$

と与えられる.

次に波浪強制力を計算するために, まず (6.27) 式の $\{E_k^j\}$ について考えてみよう.

$\{E_k^j\}$ は $\{\psi_I^j(x_j, y)\}$ の各成分に対する流体力であるが, $\{\psi_I^j(x_j, y)\}$ の各成分は, (6.20) 式からわかるように, それぞれ x 軸の負方向, 及び x 軸の正方向から入射してくる波の速度ポテンシャルである. したがって, Haskind-Newman の関係式によれば,

$$\{E_k^j\} = \{H_k^-(K), H_k^+(K)\} \quad (k = 1 \sim 3) \quad (6.43)$$

と表せるはずである. ここで $H_k^\pm(K)$ は k -mode の radiation 問題における Kochin 関数である. k -mode は $k = 1$; sway, $k = 2$; heave, $k = 3$; roll であるから, 左右対称浮体では $H_k^-(K) = (-1)^k H_k^+(K)$ の関係がある.

これらの関係と (6.29), (6.30) 式などを用いると, (6.28) 式は次のように計算することができる.

$$\begin{aligned} W_k^L &= \rho g a \{e^{-iKP} + A_2^- e^{-i2KP}\} H_k^+(K) \\ &= \rho g a D_L(K) H_k^+(K) \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} W_k^R &= \rho g a \{e^{iKP} H_k^+(K) + A_1^+ e^{-i2KP} H_k^-(K)\} \\ &= \rho g a \{e^{iKP} + (-1)^k D_R(K)\} H_k^+(K) \end{aligned} \quad (6.45)$$

6.4 複数浮体の radiation 問題

Radiation 問題でも浮体間の相互干渉に関する考え方は diffraction 問題と同じである. 違いは, 相互干渉の入力として外方からの入射波が存在しない代わりに, 浮体が動揺することによって発生する波を考える点にある.

そこで n -th body が ℓ -mode の強制動揺をすることによって発生する波を入力として考えよう. その速度ポテンシャルを

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \text{Re} \left[i\omega X_\ell^n \varphi_\ell^n(x_n, y) e^{i\omega t} \right] \\ &= \text{Re} \left[\frac{g}{i\omega} (-K X_\ell^n) \varphi_\ell^n(x_n, y) e^{i\omega t} \right] \end{aligned} \quad (6.46)$$

と表す. ここで X_ℓ^n は動揺振幅である.

この時、 $\varphi_\ell^n(x_n, y)$ は形式的には (6.12) 式で与えられるが、以前と同様に、 n -th body 以外の浮体近くでは $m \geq 1$ の local wave の項は小さいとして省略することになると、次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\varphi_\ell^n(x_n, y) &= \{i H_\ell^+(k_0), i H_\ell^-(k_0)\} \{\psi_S^n(x_n, y)\} \\ &\equiv \{b_\ell\}^T \{\psi_S^n(x_n, y)\}\end{aligned}\quad (6.47)$$

ここで

$$H_\ell^\pm(k_0) = C_0 \int_{S_H} \left\{ \frac{\partial \varphi_\ell(Q)}{\partial n_Q} - \varphi_\ell(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \right\} Y_0(\eta) e^{\pm i k_0 \xi} ds \quad (6.48)$$

(6.48) 式は ℓ -mode の radiation 問題における Kochin 関数であるが、浮体形状がすべて同じである時には、浮体の番号 n には関係なく求まるので、その行列を (6.47) 式のように $\{b_\ell\}$ と表す。

さて、(6.47) 式は j -th body の座標で表すと、(6.20) 式によって

$$\varphi_\ell^j(x_j, y) = \{b_\ell\}^T [T_{nj}] \{\varphi_I^j(x_j, y)\} \quad (6.49)$$

と書ける。ただし、この“入射波”は、 n -th body によって発生した発散波であるから、当然のことながら $j = n$ では $[T_{nn}] = 0$ である。

(6.49) 式の $-K X_\ell^n$ 倍したものを diffraction 問題での (6.17) 式に相当する入射波と見なせばいいので、相互干渉を表す j -th body での速度ポテンシャルは (6.24) 式から

$$\phi_S^j(x_j, y) = -K X_\ell^n \left(\{b_\ell\}^T [T_{nj}] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \{A_i\}^T [T_{ij}] \right) [B]^T \{\psi_S^j(x_j, y)\} \quad (6.50)$$

と表すことができる。

また未定係数マトリックス $\{A_j\}$ に関する連立方程式も (6.26) 式と同様な形で、次のように与えられる。

$$\{A_j\} - [B] \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N [T_{ij}]^T \{A_i\} = [B] [T_{nj}]^T \{b_\ell\} \quad (j = 1 \sim N) \quad (6.51)$$

相互干渉に起因する流体力も (6.28) 式と同様な式で与えられるが、振幅 a の代わりに $-K X_\ell^n$ を用いればよいので、

$$F_{kl}^{jn} = -\rho g K X_\ell^n \left(\{b_\ell\}^T [T_{nj}] + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \{A_i\}^T [T_{ij}] \right) \{E_k^j\} \quad (6.52)$$

で与えられる。これは n -th body が ℓ -mode の動揺をする時に、 j -th body に働く k -方向の干渉流体力という意味である。Radiation 問題では干渉流体力だけでなく、 n -th body には単一浮体として動揺する時の流体力（付加質量，減衰力係数）が働くことを忘れてはならない。

6.5 双胴浮体の radiation 問題

ここで、双胴浮体の場合について具体的に考えてみよう。水深は 6.3 節と同じく無限大としておく。まず $n = 1$ 、すなわち浮体 L が動揺する時を考える。(6.51) 式の左辺は、diffraction 問題と全く同じであるから、(6.31)~(6.34) 式に対応する関係式として次式を得ることができる。

$$A_1^+ - i H_4^+ e^{-i2KP} A_2^- = 0 \quad (6.53)$$

$$A_1^- - i H_4^+ e^{-i2KP} A_2^- = 0 \quad (6.54)$$

$$A_2^+ - i H_4^+ e^{-i2KP} A_1^+ = i H_4^- (i H_\ell^+ e^{-i2KP}) \quad (6.55)$$

$$A_2^- - i H_4^+ e^{-i2KP} A_1^+ = i H_4^+ (i H_\ell^+ e^{-i2KP}) \quad (6.56)$$

これらから次の結果が得られる .

$$(i H_\ell^+ + A_1^+) e^{-i2KP} = i H_\ell^+ \frac{e^{-i2KP}}{1 + \{H_4^+ e^{-i2KP}\}^2} \equiv i H_\ell^+ E_R(K) \quad (6.57)$$

$$A_2^- e^{-i2KP} = i H_\ell^+ \frac{i H_4^+ e^{-i4KP}}{1 + \{H_4^+ e^{-i2KP}\}^2} \equiv i H_\ell^+ E_L(K) \quad (6.58)$$

$$A_1^- = i H_4^- e^{-i2KP} A_2^- = i H_\ell^+ \{i H_4^- E_L(K)\} \quad (6.59)$$

$$A_2^+ = i H_4^- e^{-i2KP} (i H_\ell^+ + A_1^+) = i H_\ell^+ \{i H_4^- E_R(K)\} \quad (6.60)$$

これらを用いると (6.52) 式から干渉流体力を計算することができる . $j = 1$ (浮体 L) , $j = 2$ (浮体 R) について考えると次式を得る .

$$\begin{aligned} F_{k\ell}^{LL} &= -\rho g K X_\ell^L (A_2^- e^{-i2KP}) H_k^+ \\ &= -\rho g K X_\ell^L \{i E_L(K)\} H_k^+ H_\ell^+ \equiv X_\ell^L f_{k\ell} \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} F_{k\ell}^{RL} &= -\rho g K X_\ell^L (i H_\ell^+ + A_1^+) e^{-i2KP} H_k^- \\ &= -\rho g K X_\ell^L (-1)^k \{i E_R(K)\} H_k^+ H_\ell^+ \equiv X_\ell^L (-1)^k g_{k\ell} \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\text{ここで} \quad \left. \begin{aligned} f_{k\ell} &= -\rho g K \{i E_L(K)\} H_k^+ H_\ell^+ = f_{\ell k} \\ g_{k\ell} &= -\rho g K \{i E_R(K)\} H_k^+ H_\ell^+ = g_{\ell k} \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

無限遠への進行波についても考えておく . 双胴船全体の座標系 $o-xy$ で表すことにすると , $x \rightarrow \pm\infty$ では次式となっていることがわかる .

$$\begin{aligned} \zeta_{+\infty}^L &= -K X_\ell^L [(i H_\ell^+ + A_1^+) e^{-iKP} + A_2^+ e^{iKP}] \\ &= -K X_\ell^L \{(1 + i H_4^-) E_R(K)\} i H_\ell^+ e^{iKP} \equiv -K X_\ell^L \alpha_\ell \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{-\infty}^L &= -K X_\ell^L [(i H_\ell^- + A_1^-) e^{iKP} + A_2^- e^{-iKP}] \\ &= -K X_\ell^L \{(-1)^\ell + (1 + i H_4^-) E_L(K)\} i H_\ell^+ e^{iKP} \equiv -K X_\ell^L \beta_\ell \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\text{ここで} \quad \left. \begin{aligned} \alpha_\ell &= (1 + i H_4^-) E_R(K) i H_\ell^+ e^{iKP} \\ \beta_\ell &= \{(-1)^\ell + (1 + i H_4^-) E_L(K)\} i H_\ell^+ e^{iKP} \end{aligned} \right\} \quad (6.66)$$

続いて (6.51) 式で $n = 2$, すなわち浮体 R が動揺する時を考える . この時の計算も殆ど同じであり , 解は次のようになる .

$$A_1^+ e^{-i2KP} = i H_\ell^- E_L(K) \quad (6.67)$$

$$(i H_\ell^- + A_2^-) e^{-i2KP} = i H_\ell^- E_R(K) \quad (6.68)$$

$$A_1^- = i H_\ell^- \{i H_4^- E_R(K)\} \quad (6.69)$$

$$A_2^+ = i H_\ell^- \{i H_4^- E_L(K)\} \quad (6.70)$$

干渉流体力は , これらを (6.52) 式に代入して次式となる .

$$F_{k\ell}^{LR} = -\rho g K X_\ell^R (-1)^\ell \{i E_R(K)\} H_k^+ H_\ell^+ = X_\ell^R (-1)^\ell g_{k\ell} \quad (6.71)$$

$$F_{k\ell}^{RR} = -\rho g K X_\ell^R (-1)^{k+\ell} \{i E_L(K)\} H_k^+ H_k^- = X_\ell^R (-1)^{k+\ell} f_{k\ell} \quad (6.72)$$

無限遠への進行波については

$$\begin{aligned}\zeta_{+\infty}^R &= -K X_\ell^R \{ (-1)^\ell + (1 + i H_4^-) E_L(K) \} (-1)^\ell i H_\ell^+ e^{iKP} \\ &= -K X_\ell^R (-1)^\ell \beta_\ell\end{aligned}\quad (6.73)$$

$$\begin{aligned}\zeta_{-\infty}^R &= -K X_\ell^R \{ (1 + i H_4^-) E_R(K) \} (-1)^\ell i H_\ell^+ e^{iKP} \\ &= -K X_\ell^R (-1)^\ell \alpha_\ell\end{aligned}\quad (6.74)$$

である．したがって，浮体 L に働く干渉流体力の合力 ($\mathcal{L}_{k\ell}$) は，(6.61) 式と (6.71) 式の和で，また浮体 R に働く干渉流体力の合力 ($\mathcal{R}_{k\ell}$) は (6.62) 式と (6.72) 式の和で与えられ，次のように表すことができる．

$$\mathcal{L}_{k\ell} = F_{k\ell}^{LL} + F_{k\ell}^{LR} = X_\ell^L f_{k\ell} + X_\ell^R (-1)^\ell g_{k\ell}\quad (6.75)$$

$$\mathcal{R}_{k\ell} = F_{k\ell}^{RL} + F_{k\ell}^{RR} = [X_\ell^L g_{k\ell} + X_\ell^R (-1)^\ell f_{k\ell}] (-1)^k\quad (6.76)$$

また $x \rightarrow \pm\infty$ への進行波も (6.64) 式と (6.73) 式の和，及び (6.65) 式と (6.74) 式の和で与えられ，次式となる．

$$\zeta_{+\infty} = \zeta_{+\infty}^L + \zeta_{+\infty}^R = -K [X_\ell^L \alpha_\ell + X_\ell^R (-1)^\ell \beta_\ell]\quad (6.77)$$

$$\zeta_{-\infty} = \zeta_{-\infty}^L + \zeta_{-\infty}^R = -K [X_\ell^L \beta_\ell + X_\ell^R (-1)^\ell \alpha_\ell]\quad (6.78)$$

第2章の付録 グリーン関数の数値計算法

周期的吹き出しによる速度ポテンシャル(グリーン関数)が(2.31)式~(2.33)式のように与えられることを示したが,実際に数値計算するには変数 k に関する積分をどのように処理するかが問題となろう.ここではその数値計算法について式変形を示す.まず,(2.24),(2.30)式によって積分 I_1 を再記すると,

$$I_1 = \oint_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos kx}{k-K} dk - i\pi e^{-Ky} \cos Kx \quad (\text{A.1})$$

$$= \int_0^\infty \frac{k \cos ky - K \sin ky}{k^2 + K^2} e^{-k|x|} dk - i\pi e^{-Ky-iK|x|} \quad (\text{A.2})$$

である.最初に(A.2)式について考えよう.

$$F(x,y) = \int_0^\infty \frac{k \cos ky - K \sin ky}{k^2 + K^2} e^{-k|x|} dk \quad (\text{A.3})$$

とおくと,この関数は次の微分方程式を満たすことがわかる.

$$\frac{dF}{dy} + KF = - \int_0^\infty e^{-k|x|} \sin ky dk = - \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (\text{A.4})$$

したがって

$$F = e^{-Ky} \left[- \int_0^y \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} e^{K\eta} d\eta + C \right] \quad (\text{A.5})$$

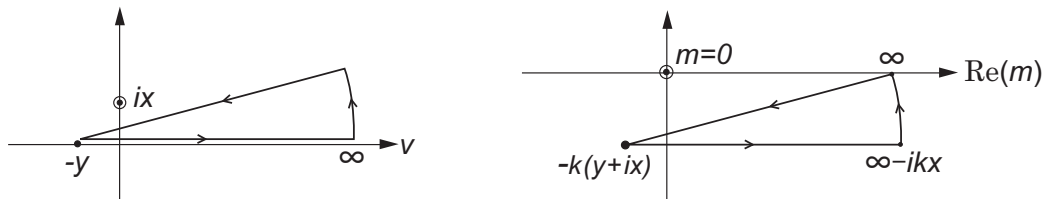
ここで C は微分方程式の未定係数であるが, $y=0$ の時 $C = F(x,0)$ であるから,(A.3)式によって次のように決定できる.

$$C = \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + K^2} e^{-k|x|} dk = - \int_{-\infty}^0 \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} e^{K\eta} d\eta \quad (\text{A.6})$$

したがって(A.5)式は

$$\begin{aligned} F &= e^{-Ky} \left[- \int_{-\infty}^y \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} e^{K\eta} d\eta \right] \\ &= e^{-Ky} \int_{-y}^\infty \frac{v}{x^2 + v^2} e^{-Kv} dv = e^{-Ky} \operatorname{Re} \int_{-y}^\infty \frac{e^{-Kv}}{v-ix} dv \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

と変形することができる.



$x > 0$ に対する積分路

ここで $K(v-ix) = m$ と変数変換すると, m 平面における積分路は図のように変形することができ,積分路内には特異点を含まないので

$$\left. \begin{aligned} F &= \operatorname{Re} \left[e^{-Ky-iKx} \int_{-K(y+ix)}^\infty \frac{e^{-m}}{m} dm \right] = \operatorname{Re} \left[e^{-Kz} E_1(-Kz) \right] \\ E_1(\zeta) &= \int_\zeta^\infty \frac{e^{-m}}{m} dm, \quad z = y + ix \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.8})$$

と表すことができる．上に示した $E_1(z)$ は積分指数関数であり，その級数展開や漸近展開式はよく知られているので数値計算は精度良く高速に行うことができる．

(A.8) 式を求める際の積分路は $x > 0$ に対するものであったが $x < 0$ の場合には複素平面の下半面に展開すればよく，それはやはり特異点を含まない．したがって (A.8) 式は $x < 0$ に対しても成立することに注意しよう．

さて，(A.8) 式を (A.3)，(A.4) 式に代入して整理すると，

$$I_1 = \operatorname{Re} \left[e^{-Kz} E_1(-Kz) \right] - i\pi e^{-Ky - iK|x|} \quad (\text{A.9})$$

ここで

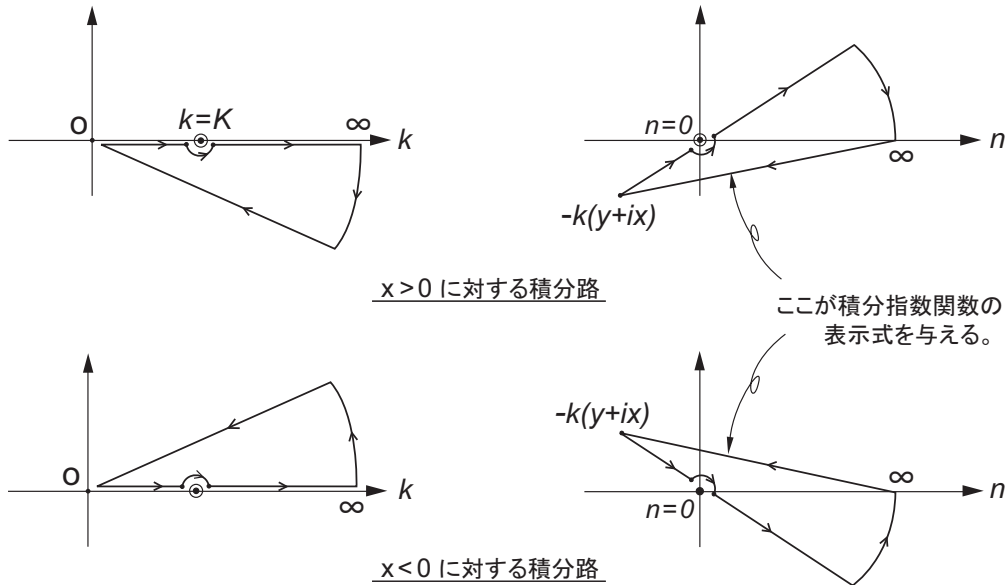
$$E_1(-Kz) = E_C + iE_S \quad (\text{A.10})$$

とおくと

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{-Ky} \operatorname{Re} \left[e^{-Kx} (E_C + iE_S) \right] - \pi e^{-Ky} \{ \operatorname{sgn}(x) \sin Kx + i \cos Kx \} \\ &= e^{-Ky} \left[E_C \cos Kx + \{ E_S - \pi \operatorname{sgn}(x) \} \sin Kx \right] - i\pi e^{-Ky} \cos Kx \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$= \operatorname{Re} \left[e^{-Kz} \{ E_1(-Kz) - i\pi \operatorname{sgn}(x) \} \right] - i\pi e^{-Ky} \cos Kx \quad (\text{A.12})$$

と表すことができる (ただし $z = y + ix$ である.)



最終結果 (A.9) 式あるいは (A.11) 式は数値計算には便利であるが，その導出過程はスマートとは思えないように思われる．そこで次に (A.1) 式について考え，(A.12) 式の結果が簡単に得られることを示すことにしよう．

(A.1) 式は次のように表せられる．

$$I_1 = \operatorname{Re} \oint_0^\infty \frac{e^{-k(y+ix)}}{k-K} dk - i\pi e^{-Ky} \cos Kx \quad (\text{A.13})$$

(A.13) 式と (A.12) 式を比較すれば

$$\oint_0^\infty \frac{e^{-k(y+ix)}}{k-K} dk = e^{-Kz} \{ E_1(-Kz) - i\pi \operatorname{sgn}(x) \} \quad (\text{A.14})$$

となることが予想されるが，これは $(k-K)(y+ix) = n$ なる変数変換を行うことによって示される．それには左辺の k に関する積分の積分路を变形する際， $x > 0$ に対しては第 4 象限に， $x < 0$ に対しては第 1 象限に展開する必要があることに注意する．したがって n -平面における積分路は上図に示すよう

になるが，特異点 $n = 0$ のまわりを迂回する方向が $x > 0$ と $x < 0$ で逆であることに注意しよう．勿論，無限遠における円弧上の積分はゼロとなり，寄与しない．したがって

$$\oint_0^\infty \frac{e^{-k(y+ix)}}{k-K} dk + i\pi \operatorname{sgn}(x) e^{-K(y+ix)} - e^{-K(y+ix)} \int_{-K(y+ix)}^\infty \frac{e^{-n}}{n} dn = 0 \quad (\text{A.15})$$

すなわち

$$\oint_0^\infty \frac{e^{-k(y+ix)}}{k-K} dk = e^{-Kz} \{ E_1(-Kz) - i\pi \operatorname{sgn}(x) \} \quad (\text{A.14})$$

where $z = y + ix$

となることがわかる．これは (A.12) 式と同じ結果を与えている．

以上のことをまとめると，最終的な (A.9) 式を示すだけなら，(A.1) 式で $(k-K)(y+ix) = n$ なる変数変換を行うのが効果的である．しかし，(A.2) 式からの変形過程も，3次元問題への拡張を考える時には役に立つと思われるので考え方を理解しておくことが大切であろう．

(2.21) 式の証明について

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-k|y-\eta|} - e^{-k(y+\eta)} \right\} \frac{\cos kx}{k} dk = -\log \frac{r}{r_1}$$

where $\left. \begin{array}{l} r \\ r_1 \end{array} \right\} = \sqrt{x^2 + (y \mp \eta)^2}$

を少し変わった方法で証明してみよう.

$$A \equiv \int_0^\infty e^{-ky} \frac{\cos kx}{k} dk$$

この時

$$\frac{dA}{dy} = - \int_0^\infty e^{-ky} \cos kx dk = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} A &= - \int^y \frac{\eta}{x^2 + \eta^2} d\eta + C(x) \\ &= -\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + C(x) = -\log \sqrt{x^2 + y^2} + C(x) \end{aligned}$$

これを用いると

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left\{ e^{-k|y-\eta|} - e^{-k(y+\eta)} \right\} \frac{\cos kx}{k} dk \\ &= -\log \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2} + C(x) + \log \sqrt{x^2 + (y+\eta)^2} - C(x) \\ &= -\log \frac{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}}{\sqrt{x^2 + (y+\eta)^2}} = -\log \frac{r}{r_1} \end{aligned}$$

となる.

少しむずかしいが, 第2種変形ベッセル関数の積分表次式

$$K_0(n\sqrt{x^2 + y^2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-y\sqrt{n^2 + k^2}}}{\sqrt{n^2 + k^2}} \cos kx dk$$

において, $n \rightarrow 0$ の極限を考えてもよい. この時

$$K_0(nr) \sim -\log r - \log \frac{n}{2} - \gamma, \quad \gamma \text{ は Euler 定数} = 0.5772156 \dots$$

であるから直ちに (2.21) 式が得られることがわかる.

グリーン関数の補遺

放射条件 (Radiation condition) の課し方に関連して、初期値問題として考えれば解に不定性が残らず、十分時間が経った後の周期的動揺の解は、Rayleigh の仮想摩擦係数を導入して求めた解と一致すると説明した。その説明をもう少し詳しく補足するために、ここでは Cauchy-Poisson の初期値問題について考え、その応用としてグリーン関数の説明をすることにしよう。

2.4 加速度ポテンシャルと初期値問題の定式化

Cauchy-Poisson の初期値問題は、 $t = 0$ で自由表面上にインパルスのな圧力が与えられた場合、または $t = 0$ で自由表面の上昇が与えられた場合の解析であり、地震による津波の解析としても知られている。この Cauchy-Poisson の初期値問題は速度の 2 乗を無視する線形理論であり、その場合には以下に述べるように、加速度ポテンシャルの考え方をを用いると理解が容易であると思われる。

非粘性に対するオイラーの運動方程式で速度の 2 乗を微小として無視すると、

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + gk = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{p}{\rho} + gz \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \quad (\text{A.15})$$

したがって

$$\phi(x, y, z; t) = -\frac{1}{\rho} p(x, y, z; t) + gz \quad (\text{A.16})$$

を加速度ポテンシャルと考えることができる。ここで速度ポテンシャルを $\Phi(x, y, z; t)$ と表すことにすると、両者の関係は次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, z; t) &= \int_{0_-}^t \phi(x, y, z; \tau) d\tau \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, y, z; t) &= \phi(x, y, z; t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.17})$$

さて、以上の準備のもとに次のような初期値問題について考える。(A.16) 式より

(i) $t = 0$ で自由表面上にインパルスのな圧力が与えられる場合

$$\phi(x, y, 0; t) = -\frac{1}{\rho} p_0 \delta(x) \delta(y) \delta(t) \quad \text{at } t = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (\text{A.18})$$

(ii) $t = 0$ で自由表面の上昇が与えられる場合

$$\phi(x, y, 0; t) = g\zeta_0 \delta(x) \delta(y) \quad \text{at } t = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (\text{A.19})$$

この条件式を速度ポテンシャル Φ に対する条件式に読みかえるには (A.17) 式によって

$$(i) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x, y, 0; 0_+) &= -\frac{1}{\rho} p_0 \delta(x) \delta(y) \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, y, 0; t) \Big|_{t=0_+} &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{on } z = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$(ii) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x, y, 0; 0_+) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, y, 0; t) \Big|_{t=0_+} &= g\zeta_0 \delta(x) \delta(y) \end{aligned} \right. \quad \text{on } z = 0 \quad (\text{A.21})$$

と表すことができる。この初期値問題を以下では簡単のために二次元について考えよう。

解法は全く同じなので，(A.20) 式のインパルス的な圧力が加えられる場合を考えることにすると，その時の二次元問題は次のように定式化される．

$$[L] \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y; t) = 0 \quad (A.22)$$

$$[F] \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - g \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y; t) = 0 \quad y = 0 \quad (A.23)$$

$$[B] \quad \Phi(x, y; t) \rightarrow 0 \quad \text{as } y \rightarrow \infty \quad (A.24)$$

$$[I] \quad \Phi = -\frac{1}{\rho} p_0 \delta(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0 \quad \text{at } t = 0_+ \quad \text{on } y = 0 \quad (A.25)$$

2.5 Cauchy-Poisson の初期値問題の解

2.1 節での解法と同様にフーリエ変換を用いると，(A.22) 式は次のようになる．

$$\left. \begin{aligned} -k^2 \Phi^* + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi^* &= 0 \\ \text{where } \Phi^* &= \Phi^*(k; y; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y; t) e^{-ikx} dx \end{aligned} \right\} \quad (A.26)$$

この解は (A.24) 式を考慮すると次のように表すことができる．

$$\Phi^*(k; y; t) = A(k, t) e^{-|k|y} \quad (A.27)$$

次に $A(k, t)$ を決定するために (A.27) 式をフーリエ変換された自由表面条件式に代入すると $A(k, t)$ に関する微分方程式は次式となる．

$$\frac{d^2}{dt^2} A(k, t) + g|k| A(k, t) = 0$$

したがって

$$A(k, t) = a(k) \cos \sqrt{g|k|} t + b(k) \sin \sqrt{g|k|} t \quad (A.28)$$

未定係数 $a(k)$, $b(k)$ は (A.25) 式の初期条件をフーリエ変換した式から決定することが出来，その結果は次式となる．

$$a(k) = -\frac{p_0}{\rho}, \quad b(k) = 0$$

したがって

$$\Phi^*(k; y; t) = -\frac{p_0}{\rho} e^{-|k|y} \cos \sqrt{g|k|} t \quad (A.29)$$

となる．このフーリエ逆変換によって速度ポテンシャルが求められ，それから波形が計算できる．すなわち，

$$\Phi(x, y; t) = -\frac{p_0}{\pi \rho} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos kx \cos(\sqrt{gk} t) dk \quad (A.30)$$

$$\zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{y=0} = \frac{p_0}{\pi \rho \sqrt{g}} \int_0^{\infty} \cos kx \sin(\sqrt{gk} t) \sqrt{k} dk \quad (A.31)$$

$$= \frac{p_0}{\pi \rho g^2} \text{Im} \int_0^{\infty} \left\{ e^{i(kx + \sigma t)} - e^{i(kx - \sigma t)} \right\} \sigma^2 d\sigma \quad (A.32)$$

ここで $\sigma^2 = gk$ である．

(A.32) 式によると， x 軸の負及び正の方向に伝播するあらゆる波長の単調和振動波列を重ね合わせたもので与えられることがわかる．(A.32) 式のままではそれ以上のことはわからないが，時間が十分経った場合を考えると停留位相法 (stationary-phase method) によって更に変形することが出来，もう少し詳しいことがわかる．それは演習問題として考えることにしよう．

2.6 自由表面上の圧力分布問題

前節までに考えた初期値問題は，(A.18) 式が示すように $x = 0$ の位置で $t = 0$ にインパルスのな圧力が加えられた場合の，いわばインパルス応答である．そこで，より一般的な場合，すなわち自由表面上のいたるところに，過去から現在まで連続して圧力が加えられている場合の解は (A.30) 式を用いて次のように表すことができる．

$$\Phi(x, y; t) = -\frac{1}{\pi\rho} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} dk P_0(\xi, \tau) e^{-ky} \cos k(x - \xi) \cos \sigma(t - \tau) \quad (\text{A.33})$$

$$\text{ここで } P_0(\xi, \tau) \text{ として，} \quad P_0(\xi, \tau) = \text{Re} \left\{ p(\xi) e^{i\omega\tau} \right\} \quad \text{for } \tau \geq 0 \quad (\text{A.34})$$

なる少し特別な場合を考えてみよう．すなわち $t = 0$ から円周波数 ω の周期的に変化する圧力が加えられる場合である．この時の解は (A.34) 式を (A.33) 式に代入することにより，

$$\begin{aligned} \Phi(x, y; t) &= -\frac{1}{\pi\rho} \text{Re} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{i\omega\tau} \int_0^{\infty} dk e^{-ky} \cos k(x - \xi) \cos \sigma(t - \tau) \\ &= -\frac{1}{\pi\rho} \text{Re} e^{i\omega t} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{-i\omega(t-\tau)} \int_0^{\infty} dk e^{-ky} \cos k(x - \xi) \cos \sigma(t - \tau) \\ &= -\frac{1}{\pi\rho} \text{Re} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \int_0^{\infty} dk e^{-ky} \cos k(x - \xi) \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \left\{ e^{-i(\sigma+\omega)(t-\tau)} + e^{i(\sigma-\omega)(t-\tau)} \right\} \\ &= -\frac{1}{\pi\rho} \text{Re} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \int_0^{\infty} dk e^{-ky} \cos k(x - \xi) \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1 - e^{-i(\sigma+\omega)t}}{\sigma + \omega} - \frac{1 - e^{i(\sigma-\omega)t}}{\sigma - \omega} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

と変形することができる．

ここで，十分時間が経った後を考えると，(A.34) 式からわかるように，周期的な定常状態になっていると考えられ，その時の解は，2.1 節のように，最初から流場は周期的な定常状態にあるとして放射条件を課した場合の解に漸近するはずである．そこで (A.35) 式において $t \rightarrow \infty$ を考える．その計算方法に関する説明として 3 通り考えられるであろう．すなわち， k に関する積分で

- i) Riemann-Lebesgue の補助定理を使う
 - ii) 複素積分を行う
 - iii) $\omega = \omega - i\varepsilon$ を代入し，適宜 $\varepsilon \rightarrow 0$ とする
- i) の Riemann-Lebesgue の補助定理とは次式のように表される．

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b F(k) \frac{e^{if(k)t}}{f(k)} dk = \pi i \frac{F(\beta)}{|f'(\beta)|} + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad (\text{A.36})$$

ここで β は積分範囲内での $f(k) = 0$ の単根を表す．

この式は複素積分を行うことによって証明できる．したがって i) と ii) の説明方法は基本的には全く同じであると言うことができる．そこで，(A.35) 式の k に関する積分に (A.36) 式を適用して $t \rightarrow \infty$ を考えると， $\sigma = \sqrt{gk}$ ， $\omega = \sqrt{gk}$ なる関係に注意して次式を得ることができる．

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos k(x - \xi) \left\{ \frac{1 - e^{-i(\sigma+\omega)t}}{\sigma + \omega} - \frac{1 - e^{-i(\sigma-\omega)t}}{\sigma - \omega} \right\} dk \\ &= \frac{1}{2} \oint_0^{\infty} e^{-ky} \cos k(x - \xi) \left\{ \frac{1}{\sigma + \omega} - \frac{1}{\sigma - \omega} \right\} dk + i\pi \sqrt{\frac{K}{g}} e^{-Ky} \cos K(x - \xi) \\ &= -\frac{\omega}{g} \left[\oint_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos k(x - \xi)}{k - K} dk - i\pi e^{-ky} \cos K(x - \xi) \right] \\ &= -\frac{\omega}{g} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{ky} \cos k(x - \xi)}{k - (K - i\mu)} dk \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

最後の式変形には (2.24) 式を用いた .

(A.37) 式を (A.35) 式に代入すると , 速度ポテンシャルの $t \rightarrow \infty$ での形として次式を得ることができたことになる .

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y; t) &= \text{Re} \left[\varphi(x, y) e^{i\omega t} \right] \\ \varphi(x, y) &= -\frac{i\omega}{\pi\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dk \frac{e^{-ky} \cos k(x - \xi)}{k - (K - i\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.38})$$

ところで , $\omega = \omega - i\varepsilon$ を代入するという iii) の説明方法は , 時間に依存する過渡的な項が $t \rightarrow \infty$ で消滅するように考えたものであるが , その結果が (A.37) 式と全く同じになることは容易に確かめることができる . またこれは以前に説明した (2.37) 式と同じことを言っている .

以上のように初期値問題として考えると , 放射条件を課すことなく解は唯一に決定できることが理解されるであろう . ただ , ここで考えた問題は , 自由表面上の圧力分布によ造波であり , グリーン関数として説明した単位強さの吹き出しによる造波とは同じではない . そこで次に , (A.40) 式の応用としてグリーン関数を導いておくことにしよう .

2.7 グリーン関数の導出

自由表面下の (ξ, η) にある吹き出しによる造波問題を次のような形で考えてみよう .

$$\Phi(x, y; \xi, \eta; t) = \text{Re} \left[e^{i\omega t} \log \frac{r}{r_1} + H(x, y; \xi, \eta; t) \right] \quad (\text{A.39})$$

$$\text{where} \quad \left. \begin{aligned} r \\ r_1 \end{aligned} \right\} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y \mp \eta)^2}$$

ここで (A.39) 式の第 1 項は自由表面条件式を満たしていないので , それを補正するために , 正則な関数 $H(x, y; \xi, \eta; t)$ が満たすべき自由表面条件式を求めてみる .

(A.39) 式を (A.23) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - g \frac{\partial H}{\partial y} &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - g \frac{\partial}{\partial y} \right) e^{i\omega t} \log \frac{r}{r_1} \quad \text{on } y = 0 \\ &= +g e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{r}{r_1} \quad \text{on } y = 0 \\ &= -2g e^{i\omega t} \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

を得る . これは自由表面上に圧力分布がある場合の自由表面条件式に等価であり , その圧力分布は次のように与えられる .

$$P_0(x, t) = -2i \frac{\rho g}{\omega} \frac{\eta}{(x - \xi)^2 + \eta^2} e^{i\omega t} \quad (\text{A.41})$$

これを前節で考えた圧力分布として $H(x, y; \xi, \eta; t)$ の具体的な表示式を求めることができる . ここでは過渡的な項はあまり興味がないので $t \rightarrow \infty$ での形だけを考えることにすると , (A.40) 式によって

$$\left. \begin{aligned} H(x, y; \xi, \eta; t) &= \tilde{H}(x, y; \xi, \eta; t) e^{i\omega t} \\ \tilde{H} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\eta}{(x' - \xi)^2 + \eta^2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dk \frac{e^{-ky} \cos k(x - x')}{k - (K - i\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.42})$$

ここで x' に関する積分は , 次のように計算できる .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\eta}{(x' - \xi)^2 + \eta^2} \cos k(x - x') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{u^2 + \eta^2} \cos k(x - u - \xi) du \\ &= \cos k(x - \xi) \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{u^2 + \eta^2} e^{iku} du = \pi e^{-k\eta} \cos k(x - \xi) \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

したがって

$$\tilde{H}(x, y; \xi, \eta; t) = -2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+\eta)} \cos k(x-\xi)}{k - (K - i\mu)} dk \quad (\text{A.44})$$

となることがわかる。(A.42) 式を (A.39) 式に代入し, 単位強さの吹き出しとなるよう係数を規格化すると, 最終的に次式を得ることができる.

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y; \xi, \eta; t) &= \text{Re} \left[G(x, y; \xi, \eta) e^{i\omega t} \right] \\ G(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{r_1} - \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+\eta)} \cos k(x-\xi)}{k - (K - i\mu)} dk \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.45})$$

これは (2.31) 式と同じである. すなわち, 初期値問題として考え, $t \rightarrow \infty$ での解を求めると, 放射条件を課すことなく正しい解が得られている. これによって, 周期的な定常動揺として考えた際の Rayleigh の仮想摩擦係数の導入や, 周波数 ω を $\omega - i\varepsilon$ とすることによって放射条件を満足させることの解釈が少しは容易になったと思われる.