

第4章 回転運動する剛体の力学

浮体をはじめとする物体は、直線運動だけでなく回転運動もするのが一般的であり、それらは単独ではなく同時に起こる、すなわち連成運動をする。ここでは特に剛体の回転運動の運動方程式をどのように導き、それに関連した事項をどのように理解するかに重点をおいて解説する。

4.1 角運動量と回転運動の方程式

剛体とは、相対位置の変わらない無数の質点より成る1つの質点系である。したがって剛体の運動方程式を考える際には質点系の一般的原理をそのまま適用することができる。例えば、剛体の重心の移動運動については、ベクトルで表すと

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}_G) = \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad M\frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

が成り立つ。ここで M は剛体の質量、 \mathbf{v}_G は重心の速度、 $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_G$ は運動量、 \mathbf{F} は剛体に働く外力の合力である。

剛体の重心まわりの回転運動については、(4.1) に対応して

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_G = \mathbf{M}_G \quad (4.2)$$

と表すことができる。ここで \mathbf{H}_G は重心に関する角運動量であり、 \mathbf{M}_G は重心に関する外力の合モーメントである。この角運動量についてももう少し考えてみよう。

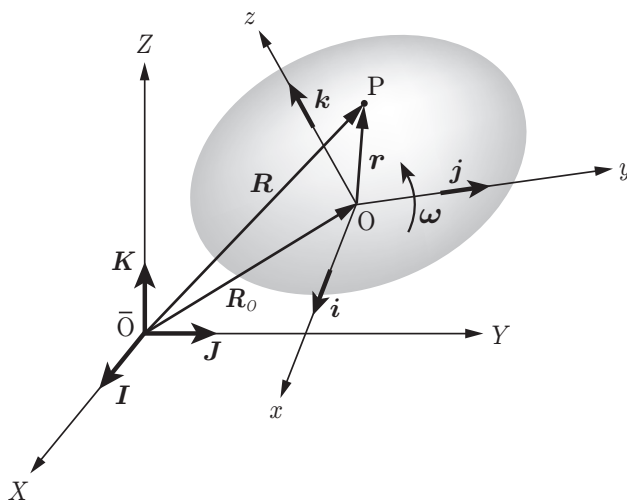


Fig. 4.1 空間固定座標系と回転座標系

まず剛体内の任意の点の速度の表示式について考える。慣性空間に固定の座標系（これを空間固定座標系と呼ぶ）を $\bar{O}-XYZ$ とし、その基本ベクトルを $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ とする。また剛体内に固定されている回転座標系（これを物体固定座標系と呼ぶこともある）を $O-xyz$ とし、その基本ベクトルを $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ とする。このとき剛体内の任意の点 P の位置ベクトルは

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r} \quad (4.3)$$

と表される (Fig. 4.1 参照)。

次に剛体内の回転角速度すなわち回転座標系の角速度を $\boldsymbol{\omega}$ として、空間固定座標系における剛体内の任意の点 P の速度を

考える。空間固定座標系と回転座標系の微分の関係式

$$\frac{d}{dt} = \left[\frac{d}{dt} \right] + \boldsymbol{\omega} \times \quad (4.4)$$

(ただし $[\]$ は回転座標系における演算を示す)

を用いて (4.3) の微分を考えると, $[\dot{\mathbf{r}}] = 0$ であるから次の結果を得る.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \equiv \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (4.5)$$

物体固定座標系の原点を O として, いま剛体の重心 G をとることにする. 剛体内の点 P における微小要素を dm とし, 剛体の全体積を V とすれば, まず剛体の運動量 \mathbf{P} は各要素の運動量 $d\mathbf{P} = \mathbf{v}dm$ のすべての和として

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int_V d\mathbf{P} = \int_V \mathbf{v} dm = \int_V (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \\ &= \mathbf{v}_G \int_V dm + \boldsymbol{\omega} \times \int_V \mathbf{r} dm = M \mathbf{v}_G \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる. $M = \int_V dm$ は剛体の質量であり, この結果は (4.1) に用いられた.

続いて角運動量 \mathbf{H}_G については

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \int_V \mathbf{r} \times d\mathbf{P} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \\ &= -\mathbf{v}_G \times \int_V \mathbf{r} dm + \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm = \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる. これを具体的に計算してみよう. $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{r} を

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (4.8)$$

のように表すと

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (qz - ry)\mathbf{i} + (rx - pz)\mathbf{j} + (py - qx)\mathbf{k} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \{y(py - qx) - z(rx - pz)\}\mathbf{i} \\ &\quad + \{z(qz - ry) - x(py - qx)\}\mathbf{j} \\ &\quad + \{x(rx - pz) - y(qz - ry)\}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.10)$$

となるから (4.7) より角運動量は次のように表せることがわかる.

$$\mathbf{H}_G = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} \quad (4.11)$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

ここで

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) dm, \quad I_{yy} = \int_V (z^2 + x^2) dm, \quad I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) dm \quad (4.13)$$

はそれぞれ x, y, z 軸に関する物体の慣性モーメント (moment of inertia) であり, また (4.12) の行列式の非対角要素

$$I_{xy} = I_{yx} = - \int_V xy dm, \quad I_{yz} = I_{zy} = - \int_V yz dm, \quad I_{zx} = I_{xz} = - \int_V zx dm \quad (4.14)$$

は慣性乗積 (product of inertia) と呼ばれる. 船は通常左右対称と考えてよいが, このときには, 対称面を xz 面とすると, y を被積分関数に含む慣性乗積の値 (I_{xy}, I_{yz}) はゼロとなる. 左右対称に加えてさらに前後にも対称であれば, すべての慣性乗積はゼロとなる.

ところで (4.12) は行列を使って次のように表すこともある.

$$\{\mathbf{H}_G\} = [\mathbf{I}] \{\boldsymbol{\omega}\} \quad (4.15)$$

この正方行列 $[\mathbf{I}]$ は慣性テンソル (inertia tensor) と呼ばれている.

4.2 慣性モーメントと慣動半径

慣性モーメントの定義式は既に (4.13) で示されたが、これらを次のように表すことがある。

$$I_{xx} = M \kappa_{xx}^2, \quad I_{yy} = M \kappa_{yy}^2, \quad I_{zz} = M \kappa_{zz}^2 \quad (4.16)$$

すなわち

$$\kappa_{xx}^2 = \frac{\int_V (y^2 + z^2) dm}{M}, \quad \kappa_{yy}^2 = \frac{\int_V (z^2 + x^2) dm}{M}, \quad \kappa_{zz}^2 = \frac{\int_V (x^2 + y^2) dm}{M} \quad (4.17)$$

とし、この $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{zz}$ をそれぞれ x, y, z 軸まわりの慣動半径 (gyrational radius) と呼ぶ。これらの値を球および直方体について計算してみよう。

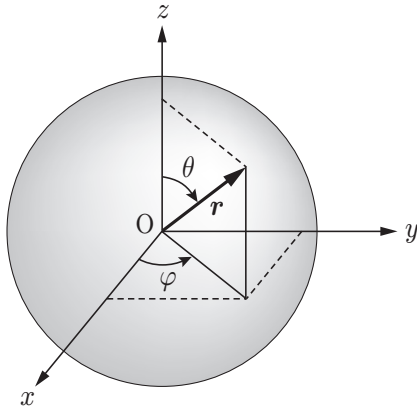


Fig. 4.2 球の慣性モーメントの計算

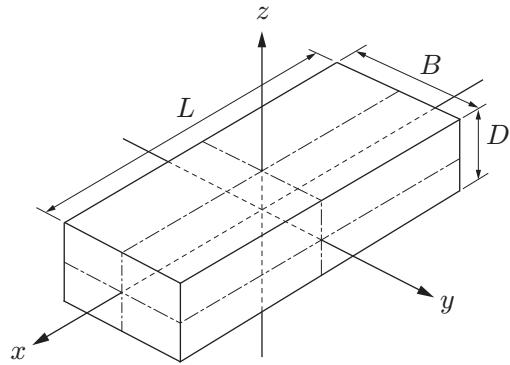


Fig. 4.3 直方体の慣性モーメントの計算

【例題 1】均質な球の慣性モーメント

Fig. 4.2 のような球座標を用いる。

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

の関係を用い、一様な密度を ρ 、半径を R と表すと

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V (y^2 + z^2) dm = \rho \int_V (y^2 + z^2) dV \\ &= \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

であり、

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}, \quad \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi, \quad \int_0^R r^4 dr = \frac{R^5}{5}$$

を代入すると

$$I_{xx} = \rho \frac{R^5}{5} \frac{8\pi}{3} = \left(\rho \frac{4}{3} \pi R^3 \right) \frac{2}{5} R^2 \equiv M \kappa_{xx}^2 \quad (4.18)$$

を得る。これより

$$\kappa_{xx} = \sqrt{\frac{2}{5}} R \simeq 0.632 R = 0.316 \times (2R) \quad (4.19)$$

が得られ、重量分布が一様な場合には、慣動半径は球の半径 R の 0.632 倍であることが分かる。また球の計算は軸の取り方に関係しないので $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ である。

【例題2】

次に少し船をイメージして、長さ L 、幅 B 、高さ D の均質な直方体について慣性モーメントを考えてみる。Fig.4.3 のように、直方体の中心面に x, y, z 軸をとる。一様な密度を ρ とすると

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV = \rho L D \frac{B^3}{12} + \rho L B \frac{D^3}{12} = M \frac{B^2 + D^2}{12} \equiv M \kappa_{xx}^2 \quad (4.20)$$

を得る。同様にして

$$I_{yy} = M \frac{L^2 + D^2}{12} \equiv M \kappa_{yy}^2, \quad I_{zz} = M \frac{L^2 + B^2}{12} \equiv M \kappa_{zz}^2 \quad (4.21)$$

を得る。ただし $M = \rho L B D$ である。

ここで船に近い寸法として $D/B = 1, B/L = 1/5$ を考えてみると、(4.21) から

$$\kappa_{xx} \simeq 0.408 B, \quad \kappa_{yy} = \kappa_{zz} \simeq 0.294 L \quad (4.22)$$

となることが分かる。実際の船では重量分布は一様ではないし、前後に細くなっているので (4.22) の値より少し小さく、目安としては $\kappa_{xx} \simeq 0.35 B, \kappa_{yy} \simeq \kappa_{zz} \simeq 0.25 L$ 程度である。重量分布が船の中央付近に集中していれば、慣動半径の値はさらに小さくなる。

演習 4.1

長さ $L = 2a$ 、幅 $B = 2b$ 、高さ $D = 2c$ の均質な 3 次元楕円体

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

について慣性モーメント I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} の計算式を求め、 $c/b = 1, b/a = 1/5$ の場合について x, y, z 軸まわりの慣動半径を計算しなさい。 $x/a = r \cos \theta, y/b = r \sin \theta \cos \varphi, z/c = r \sin \theta \sin \varphi$ ($0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) とおけば、球に対する計算と同様に行うことができる。結果は次のようになるはずである。

$$\kappa_{xx} \simeq 0.316 B, \quad \kappa_{yy} = \kappa_{zz} \simeq 0.228 L$$

剛体の運動方程式を重心 G ではなく任意の点 O を座標系の原点として考えることもある。このときには慣性テンソルも任意の点 O に関して計算する必要があるが、その計算に関する定理を以下に示す。

Fig.4.4 に示すように、剛体に固定した座標系を $O-xyz$ とし、重心 G はこの座標系に対して $\mathbf{r}_G(x_G, y_G, z_G)$ にあるものとして、 xyz に平行な座標系 $G-x'y'z'$ を考える。重心に関する慣性モーメントと慣性乗積の値を上付き添字 G で示すと、例えば z 軸まわりの慣性モーメントの計算は次のようになる。

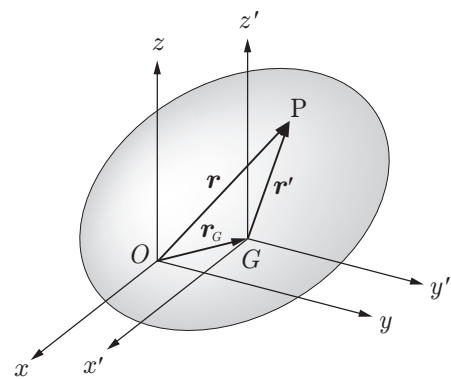


Fig.4.4 任意点まわりの慣性モーメント

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \int_V (x^2 + y^2) dm = \int_V (x_G + x')^2 dm + \int_V (y_G + y')^2 dm \\ &= (x_G^2 + y_G^2) \int_V dm + \int_V (x'^2 + y'^2) dm + 2x_G \int_V x' dm + 2y_G \int_V y' dm \\ &= (x_G^2 + y_G^2) M + I_{zz}^G \end{aligned}$$

同様にして次の結果を得ることができる。

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= I_{xx}^G + M(y_G^2 + z_G^2), & I_{xy} &= I_{xy}^G - Mx_G y_G \\ I_{yy} &= I_{yy}^G + M(z_G^2 + x_G^2), & I_{yz} &= I_{yz}^G - My_G z_G \\ I_{zz} &= I_{zz}^G + M(x_G^2 + y_G^2), & I_{zx} &= I_{zx}^G - Mz_G x_G \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

これらから「任意の座標系に関する慣性モーメント（慣性乗積）は、重心を通る平行な座標軸に関する値と、全質量が重心に集中したと考えた値との和に等しい」ことが分かる。この関係を**スタイナーの定理**という。

4.3 剛体振り子

剛体の回転運動の単純で重要な例として、Fig.4.5 に示すように、重力の作用のもとで水平な固定軸のまわりに回転運動する剛体を考えよう。この剛体振り子は単振り子に対して**複振り子** (compound pendulum) と呼ばれることがある。

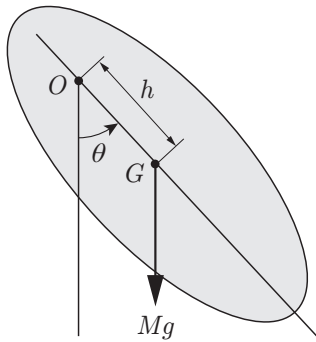


Fig.4.5 剛体振り子

いま垂直面内で固定軸を O 、剛体の重心を G 、 $\overline{OG} = h$ 、 \overline{OG} が鉛直線となす角を θ 、剛体の質量を M 、 O 点に関する慣性モーメントを I_0 とすれば、この剛体振り子の運動方程式は (4.2) から

$$I_0 \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta \quad (4.24)$$

となる。ここで慣動半径 κ を用いて $I_0 = M\kappa^2$ と表すと、(4.24) は

$$M \frac{\kappa^2}{h} \ddot{\theta} = -Mg \sin \theta \quad (4.25)$$

となり、これを長さ ℓ の単振り子の運動方程式 $m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$ と比較すれば

$$\ell = \frac{\kappa^2}{h} \quad (4.26)$$

の長さの腕をもつ単振り子と同じ運動をすることが分かる。したがって、微小振幅の運動をしている場合の周期は次式で与えられる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi \frac{\kappa}{\sqrt{gh}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mgh}} \quad (4.27)$$

したがって

$$\kappa = \frac{T}{2\pi} \sqrt{gh} \quad (4.28)$$

を得るが、これによれば、剛体の重心位置 (h) を測定しておき、任意の固定点まわりに振動させてその周期 T を測定すれば、固定点まわりの剛体の慣動半径 κ を求めることができる。重心 G まわりの慣性モーメントは (4.23) によって

$$I_G = I_0 - Mh^2 = M(\kappa^2 - h^2) \equiv M\kappa_G^2 \quad (4.29)$$

と求められるから、この式から重心まわりの慣動半径は $\kappa_G = \sqrt{\kappa^2 - h^2}$ として求められることになる。これらの原理を使えば、実験に用いる模型船の慣動半径を計測によって知ることができる。

4.4 剛体の運動エネルギー

空間内を運動する剛体の運動エネルギーを考えておこう。剛体の重心 G に原点をおく物体固定座標系 $G-xyz$ を考えると、剛体内の任意の点 P の速度は (4.5) によって $\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ である。これより

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_G^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{v}_G \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

となるから、剛体の運動エネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V v^2 dm \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm + \mathbf{v}_G \cdot \boldsymbol{\omega} \times \int_V \mathbf{r} dm \end{aligned} \quad (4.30)$$

と書ける。ここで座標原点は重心だから $\int_V \mathbf{r} dm = 0$ であり、

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (4.31)$$

と変形できるから、(4.30)は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\omega}\}^T [\mathbf{I}] \{\boldsymbol{\omega}\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

と表せる。ここで角運動量 \mathbf{H}_G の表示式として (4.7) および (4.15) を用いた。また $\{\boldsymbol{\omega}\}^T$ における上付き添字 T は転置行列を意味する。

これから、剛体の運動エネルギーは重心の移動と重心まわりの回転運動の2つのエネルギーの和で表され、回転の運動エネルギーは角速度と角運動量の内積で表されることが分かる。

剛体の場合も力学的エネルギー保存の法則が成り立つ。すなわち (4.32) で与えられる運動エネルギー T と位置エネルギー U の和は

$$E = T + U = \text{一定} \quad (4.33)$$

という関係が成り立つ。このことを剛体振り子の場合で確かめておこう。重心 G の速度は $v_G = h\dot{\theta}$ であるから (4.29) を用いて

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M h^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (I_0 - M h^2) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 \\ U &= M g h (1 - \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

を得るから (4.33) より

$$\frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 + M g h (1 - \cos \theta) = C \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 - M g h \cos \theta = C' \quad (4.35)$$

となる。この結果は運動方程式 (4.24) から導くこともできる。すなわち (4.24) の両辺に $\dot{\theta}$ を掛けて積分すれば

$$I_0 \dot{\theta} \ddot{\theta} = -M g h \dot{\theta} \sin \theta \quad \longrightarrow \quad I_0 \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = M g h \cos \theta + C'$$

となって (4.35) と同じ結果を与えることが分かる。

4.5 剛体の平面運動

ここでは船の操縦運動を念頭において、剛体の平面運動、すなわち物体固定の回転座標系 $G-xyz$ の xy 面が、空間固定の座標系 $\bar{O}-XYZ$ の XY 面内に常にある場合について、剛体の運動方程式を2通りの方法で考えてみる。

(1) 空間固定座標系での運動方程式

船に働く外力は、空間固定座標で $\mathbf{F} = F_X \mathbf{I} + F_Y \mathbf{J}$ と表せるとする。また重心の位置は $\mathbf{R}_G = X_G \mathbf{I} + Y_G \mathbf{J}$ であるから、重心の直線運動の加速度は

$$\mathbf{a}_G = \ddot{X}_G \mathbf{I} + \ddot{Y}_G \mathbf{J} \quad (4.36)$$

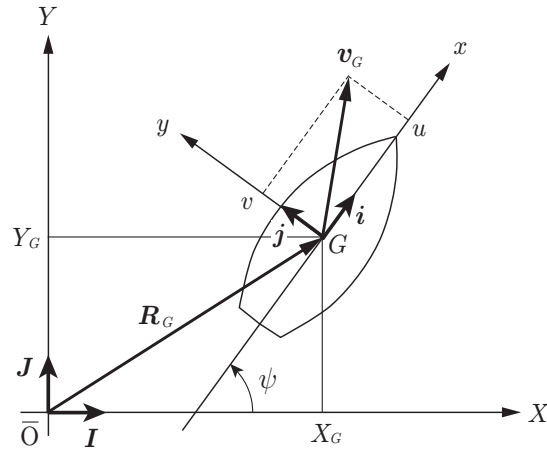


Fig. 4.6 剛体の平面運動

で与えられる．一方，回転運動は z 軸まわりだけであるから，角運動量は回転座標系での成分で表すと

$$H_x = 0, \quad H_y = 0, \quad H_z = I_{zz} r = I_{zz} \dot{\psi} \quad (4.37)$$

である． z 軸と Z 軸は同じ ($\mathbf{k} = \mathbf{K}$) であるから，これをベクトルで表すと

$$\mathbf{H}_G = I_{zz} \dot{\psi} \mathbf{k} = I_{zz} \dot{\psi} \mathbf{K} \quad (4.38)$$

となる．剛体に働くモーメントも z 成分だけであるから， $\mathbf{M}_G = M_z \mathbf{k} = M_z \mathbf{K}$ と表すと，運動方程式は (4.1) (4.2) から

$$M \ddot{X}_G = F_X, \quad M \ddot{Y}_G = F_Y, \quad I_{zz} \ddot{\psi} = M_z \quad (4.39)$$

で与えられる．ここで船の方位 (ψ) は時々刻々変化するけれども， F_X, F_Y は空間固定座標系での X 方向， Y 方向に働く外力であることに注意されたい．

(2) 物体固定の回転座標系での運動方程式

重心 G の絶対速度を物体固定座標系で $\mathbf{v}_G = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ と表すことにしよう．このとき慣性系での加速度は， \mathbf{i}, \mathbf{j} の向きも時間とともに変化するから

$$\mathbf{a}_G = \dot{\mathbf{v}}_G = \dot{u}\mathbf{i} + u\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{v}\mathbf{j} + v\frac{d\mathbf{j}}{dt} \quad (4.40)$$

となり， \mathbf{i}, \mathbf{j} の時間微分は (4.4) と角速度が $\boldsymbol{\omega} = r\mathbf{k} (= \dot{\psi}\mathbf{k})$ であることを用いて

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = \dot{\psi}\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \dot{\psi}\mathbf{j} \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = \dot{\psi}\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\dot{\psi}\mathbf{i} \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

と計算される．よって加速度は

$$\mathbf{a}_G = (\dot{u} - v\dot{\psi})\mathbf{i} + (\dot{v} + u\dot{\psi})\mathbf{j} \quad (4.42)$$

と与えられる．外力は物体固定座標で $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$ で表せるとし，また回転運動に関しては $\mathbf{H}_G = I_{zz}\dot{\psi}\mathbf{k}$ ， $\mathbf{M}_G = M_z\mathbf{k}$ であるから，運動方程式は次のように書くことができる．

$$\left. \begin{aligned} M(\dot{u} - v\dot{\psi}) &= F_x \\ M(\dot{v} + u\dot{\psi}) &= F_y \\ I_{zz}\ddot{\psi} &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

この方程式を解いて u, v, ψ が時間の関数として求められると、 $\dot{X}_G + i\dot{Y}_G = (u + iv)e^{i\psi}$ であるから、重心の位置は次式で計算することができる。

$$\left. \begin{aligned} X_G &= X_{G0} + \int_0^t (u \cos \psi - v \sin \psi) dt \\ Y_G &= Y_{G0} + \int_0^t (u \sin \psi + v \cos \psi) dt \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

(4.43) は船の操縦運動を既述する基礎方程式であるが、流体力を数値計算や模型実験による計測で求めるとき、重心ではなく船体中央に座標の原点を置くことが多い。この新しい座標系で力、モーメントを $\mathbf{F}_m = (F_{xm}, F_{ym}, 0)$, $\mathbf{M}_m = (0, 0, M_{zm})$, 速度, 加速度を $\mathbf{v}_0 = (u_m, v_m, 0)$, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, r_m)$ と表すことにし、重心 G は $(x_G, 0, 0)$ にあるとすると、重心 G に関して考えていた値との関係は

$$\left. \begin{aligned} F_{xm} &= F_x, \quad F_{ym} = F_y, \quad M_{zm} = M_z + F_y x_G \\ u_m &= u, \quad v_m = v - x_G r, \quad r_m = r = \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

である。そこで、これらを (4.43) に代入すると、船体中央に原点を置いたときの運動方程式は、添字の m を省略して表すと

$$\left. \begin{aligned} M(\dot{u} - v\dot{\psi} - x_G\dot{\psi}^2) &= F_x \\ M(\dot{v} + u\dot{\psi} + x_G\ddot{\psi}) &= F_y \\ (I_{zz} + Mx_G^2)\ddot{\psi} + Mx_G(\dot{v} + u\dot{\psi}) &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

となることが分かる。 z 軸まわりの回転(旋回)運動における慣性モーメントは $I_{zz} + Mx_G^2$ となっているが、これは (4.23) によれば、新しい座標系での慣性モーメントであることが分かる。

4.6 剛体の空間運動

次に、より一般化して剛体の3次元空間運動を既述する運動方程式を考えておこう。これは飛行機あるいは水中機器(ロボット)の6自由度運動を考えるということであり、(4.1) および (4.2) を適用すればよい。しかし空間固定の座標系で剛体の回転運動を考えるならば、角運動量の計算に必要な慣性テンソル $[\mathbf{I}]$ の各成分も剛体の姿勢変化によって時々刻々変化することになるので取扱いが複雑になる。そこで剛体固定の回転座標系で考えることにする。

ここでは飛行体の重心 G に原点をおいた座標系 $G-xyz$ で (4.1), (4.2) を考え、飛行体の位置、姿勢は慣性空間に固定した座標系 $\bar{O}-XYZ$ で計算する。したがって回転座標系と空間固定座標系の変換式を考える必要があるが、それは後で説明する。

まず飛行体の絶対速度 \mathbf{v} および流体力 \mathbf{F} を回転座標系で次のように表す。

$$\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (4.47)$$

このとき、飛行体の質量を M として (4.1) を回転座標系で考えると

$$M \left(\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) = \mathbf{F} \quad (4.48)$$

である。 $\boldsymbol{\omega}$ を (4.8) のように $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ と表すと、(4.48) は具体的に次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} M(\dot{u} + wq - vr) &= F_x \\ M(\dot{v} + ur - wp) &= F_y \\ M(\dot{w} + vp - uq) &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

これは剛体の平面運動で考えた (4.43) の拡張になっていることが分かる。

次に重心まわりの回転運動の方程式を考えよう．飛行体に働くモーメントを $\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$ と表し, (4.2) を回転座標系で考えると

$$\left[\frac{d\mathbf{H}}{dt} \right] + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{M} \quad (4.50)$$

と表すことができる．これに (4.12) および (4.8) を代入し, 物体固定の座標系では慣性テンソルの成分は時間的に不変であることに注意すると次式を得る．

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} \dot{p} + (I_{zz} - I_{yy})qr \\ + I_{xy}(\dot{q} - rp) + I_{xz}(\dot{r} + pq) + I_{yz}(q^2 - r^2) &= M_x \\ I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp \\ + I_{yz}(\dot{r} - pq) + I_{yx}(\dot{p} + qr) + I_{zx}(r^2 - p^2) &= M_y \\ I_{zz} \dot{r} + (I_{yy} - I_{xx})pq \\ + I_{zx}(\dot{p} - qr) + I_{zy}(\dot{q} + rp) + I_{xy}(p^2 - q^2) &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

ここで飛行体が左右対称なら $I_{xy} = I_{yz} = 0$ であり, さらに前後対称あるいは上下対称ならば $I_{xz} = 0$ である．このような場合には (4.51) は次のように簡単になる．

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} \dot{p} + (I_{zz} - I_{yy})qr &= M_x \\ I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp &= M_y \\ I_{zz} \dot{r} + (I_{yy} - I_{xx})pq &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

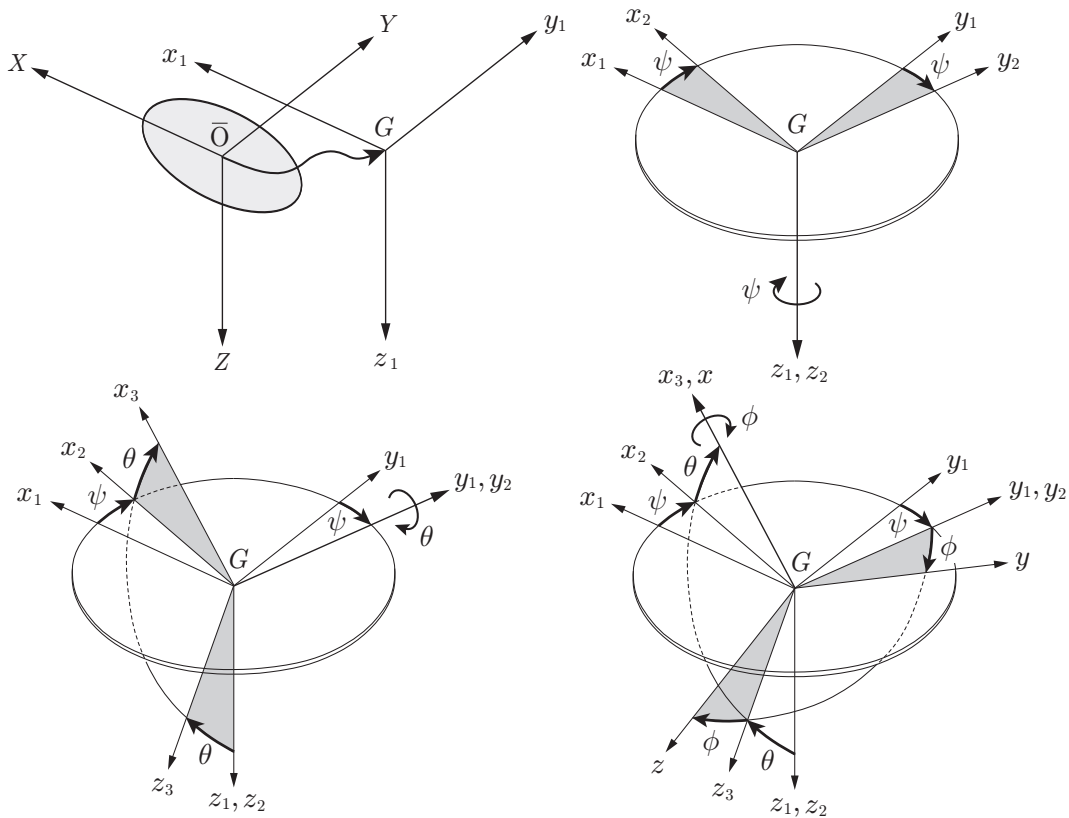


Fig. 4.7 オイラー角と座標変換

続いて飛行体の位置・姿勢を表すために、速度および角速度に関して空間固定座標系と回転座標系での関係について考えておく。そこで次の順番で座標変換を考える。

- 1) $\bar{O}-XYZ$ を平行移動して $G-x_1y_1z_1$ とする。
- 2) Gz_1 軸のまわりに ψ の回転を与え、 $G-x_2y_2z_2$ に移す。
- 3) Gy_2 軸のまわりに θ の回転を与え、 $G-x_3y_3z_3$ に移す。
- 4) Gx_3 軸のまわりに ϕ の回転を与え、 $G-xyz$ に移す。

1) は平行移動なので、重心 G の座標を指定すればよいだけである。2) ~ 4) の変換は以下に示すように行列表示することができる。

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

これら3つの変換を組み合わせると、空間固定座標系と回転座標系の関係式は次のように求められる。

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = E(\psi, \theta, \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

ここで

$$E = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

このような座標の回転角 ψ, θ, ϕ をオイラー角 (Eulerian angles) と呼んでいる。これらが定められると回転座標系での速度 (u, v, w) を用いて空間固定座標系での速度 $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ が求められ、それを積分すると

$$X = \int_0^t \dot{X} dt, \quad Y = \int_0^t \dot{Y} dt, \quad Z = \int_0^t \dot{Z} dt \quad (4.58)$$

のように飛行体の時々刻々の位置を求めることができる。しかしながら、(4.49), (4.52) によって時々刻々の $(u, v, w), (p, q, r)$ が与えられたとしても、それらとオイラー角の関係が分からなければ (4.57) の変換行列を計算することができない。それを与えるために角速度の関係を考えよう。

最初の回転角速度 $\dot{\psi}$ は z_1 軸 (= z_2 軸) まわりに与えたから、それを θ の回転によって移動した z_3 軸と x_3 軸に振り分けると $G-x_3y_3z_3$ の座標系では $(-\dot{\psi} \sin \theta, 0, \dot{\psi} \cos \theta)$ となる。次の回転角速度 $\dot{\theta}$ は y_2 軸 (= y_3 軸) まわりであり、最後の回転角速度 $\dot{\phi}$ は x_3 軸まわりであるから、これらを全部加えると、 $G-x_3y_3z_3$ の座標系では $(\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta, \dot{\theta}, \dot{\psi} \cos \theta)$ となっていることになる。これと $G-xyz$ 座標系での回転角速度 (p, q, r) との関係は

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

のように求められる。この逆変換式を計算すると次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

これは ϕ, θ, ψ に関する微分方程式と見なすことができる。したがって運動方程式から (p, q, r) が与えられると ϕ, θ, ψ を

$$\phi = \int_0^t \dot{\phi} dt, \quad \theta = \int_0^t \dot{\theta} dt, \quad \psi = \int_0^t \dot{\psi} dt \quad (4.61)$$

によって時々刻々計算することができ、それらを用いれば (4.56) ~ (4.58) によって時々刻々の飛行体の位置を計算することができることになる。

オイラー角 (ϕ, θ, ψ) は、3次元運動する船および飛行体では次のように呼ばれている。

- ϕ : 横揺れ (roll) 角 (静的には heel 角)
- θ : 縦揺れ (pitch) 角 (静的には trim 角)
- ψ : 船首揺れ (yaw) 角あるいは旋回 (回頭) 角