CFD(計算流体力学)の基礎理論

性能・運動分野「夏の学校」

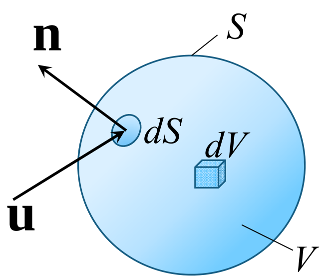
神戸大学大学院海事科学研究科
勝井　辰博

流体の質量保存

流体要素内の質量の増加率
[単位時間当たりの増加量]

=

単位時間に流体要素に流入する質量



流体要素
Fluid Element
(Control Volume)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = \int_S -\rho \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dS$$

ガウスの定理

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = \int_V -div(\rho\mathbf{u}) dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u}) = 0$$

アインシュタイン表記(総和規約)

$\mathbf{a}=a_i=(a_1, a_2, a_3)$ $\mathbf{b}=b_i=(b_1, b_2, b_3)$ ⇒ $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}= a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$$div(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV = \int_S u_i \cdot n_i dS}$$

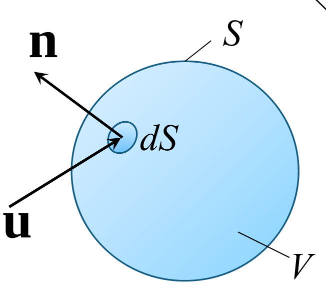
ガウスの定理

$$u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_1 \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_3}$$

$$= \left(u_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, u_1 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, u_1 \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

運動量保存

流体要素内の質量の増加率 [単位時間当たりの増加量]	＝	単位時間に流体要素に流入する運動量	＋	流体要素に働く力の総和
①		②		



流体要素
Fluid Element
(Control Volume)

① $\frac{d}{dt}\int_V \rho \mathbf{u} dV$ ② $\int_S \rho \mathbf{u}(-\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS$

①,②より外力をFとして

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS = \sum \mathbf{F}$$

ガウスの発散定理及びアインシュタイン表記を適用すると

$$\int_S \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS = \left(\int_S \rho u_1(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS,\ \int_S \rho u_2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS,\ \int_S \rho u_3(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS\right) = \int_S \rho u_i u_j n_j dS$$

$$= \left(\int_V div(\rho u_1\mathbf{u})dV,\ \int_V div(\rho u_2\mathbf{u})dV,\ \int_V div(\rho u_3\mathbf{u})dV\right) = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \underbrace{u_i u_j}_{\text{テンソル}}\right)dV$$

書き換えると

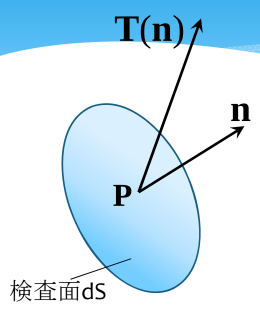
$$\rho\int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial\left(u_i u_j\right)}{\partial x_j}\right)dV = \sum F_i$$

外力fは大きく2つに分類される。

・面積力：圧力、粘性力
→境界面を通して流体要素に作用

・体積力：重力、遠心力、コリオリ力、電磁力
→流体要素内の各部分に作用

応力テンソル



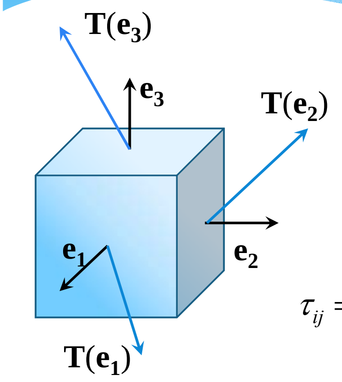
左図のように点Pを通る微小部分dSを通して
Sの内側から外側に作用する面積力をT(n)dS
とするとき、T(n)を応力テンソルと呼ぶ。

※考える点が同じであっても対応する面が異なれば応力は異なる為、T(n)も異なる。

・ベクトルとテンソル
速度ベクトル**u**(x,y,z,t)= **u**(x,t) →場所と時間によっている。
応力テンソル T(x,n,t) →場所と法線ベクトルと時間によっている。

・作用と反作用
応力テンソルは面の表方向、裏方向に同様に作用している。
⇒ T(n)=－ T(-n)

応力テンソルは法線ベクトルnによっているがnは無限に存在する。そこで下図のようにデカルト座標の座表面に平行な3つの微小面の法線ベクトル$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$を考える。



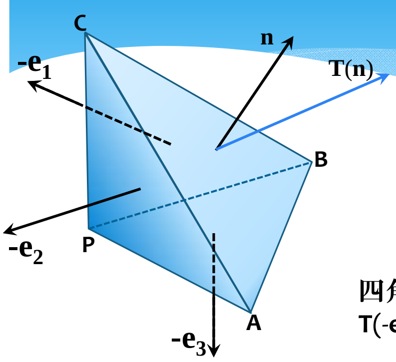
$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)=\tau_{1j}\,\mathbf{e}_j=\tau_{11}\,\mathbf{e}_1+\tau_{12}\,\mathbf{e}_2+\tau_{13}\,\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)=\tau_{2j}\,\mathbf{e}_j$$
$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)=\tau_{3j}\,\mathbf{e}_j$$

$$\tau_{ij}=\begin{bmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33}\end{bmatrix}$$

：応力テンソルの成分
i方向に垂直な面に作用する
j方向の単位面積当たりの
面積力

➡ τ_{ij}を用いて$\mathbf{T}(\mathbf{n})$はどう表されるか？

PBC:ΔS_1
PAC:ΔS_2
PAB:ΔS_3
ABC:ΔS
PABC:ΔV



$\mathbf{n}=n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3$ $(\mathbf{n}=\mathbf{n}_i)$
$\Delta S_1=n_1\Delta S$ $\Delta S_2=n_2\Delta S$ $\Delta S_3=n_3\Delta S$

⬇

四角形PABCに作用する面積力による力の総和は
$\mathbf{T}(-\mathbf{e}_1)\Delta S_1+\mathbf{T}(-\mathbf{e}_2)\Delta S_2+\mathbf{T}(-\mathbf{e}_3)\Delta S_3+\mathbf{T}(\mathbf{n})\Delta S=0$

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{T}(\mathbf{e}_i)=\tau_{ij}\mathbf{e}_j\\ \Delta S_i=n_i\Delta S\end{array}\right\}$ とすると

$-(\tau_{ij}\,n_i)\,\mathbf{e}_j\Delta S+\mathbf{T}(\mathbf{n})\Delta S=0$
$\Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{n})=(\tau_{ij}\,n_i)\,\mathbf{e}_j$

➡ $\mathbf{T}(\mathbf{n})$はτ_{ij}で表される

運動量保存Ⅱ

運動量保存は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \mathbf{u}\, dV + \int_S \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\,dS = \sum \mathbf{F}$$

または

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u_i\, dV + \int_S \rho u_i u_j n_j\, dS = \sum F_i$$

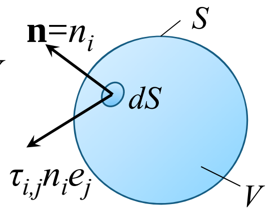
面積力をF_sとし、図よりガウスの発散定理と対称テンソルの性質を利用して

$$\mathbf{Fs} = Fs_i = \int_S \tau_{ji} n_j\, dS = \int_V \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}\, dV = \int_V \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\,dV$$

ゆえに運動量保存は

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\cdot(-\rho u_i u_j)dV + \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}dV$$

$$\int_V\left(\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j}-\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\right)dV=0$$



非圧縮性流体の運動量方程式

非圧縮性の流体の支配方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho\cdot\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j)\right)=\dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases}$$

非圧縮性の流体の場合、τ_{ij}は次のように表される。

$$\tau_{ij} = -\delta_{ij}\cdot P + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

<クロネッカーのデルタ>

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1:(i=j) \\ 0:(i\neq j) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(-\delta_{i,j}p + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

よって支配方程式は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i u_j\right) = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\cdot\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

体積力の影響を考慮して

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{u_j\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{移流項}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{拡散項}} + \underbrace{Fb_i}_{\text{体積力}} \Longrightarrow \text{NS方程式}$$

バーガーズ方程式と偏微分方程式の性質

1次元のNS方程式において圧力勾配を無視すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

移流速度をc, 拡散係数をa(a≧0,c≧0)として上式に代入し、これをバーガーズ方程式と呼ぶ。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \Rightarrow \text{バーガーズ方程式}$$

2階の偏微分方程式は{①双曲型 ②放物型 ③楕円型} の3種類に分類出来る。

① 双曲型 $\dfrac{\partial f}{\partial t}+c\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$

$f(x,t)=f(x-ct,o)$と置き、$x-ct=X$とする。

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\big(f(x-ct,0)\big)=\frac{\partial}{\partial X}\cdot\big(f(X,0)\big)\cdot\frac{\partial X}{\partial t}=-c\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x-ct,0)\big)=\frac{\partial}{\partial X}\cdot\big(f(X,0)\big)\cdot\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$$

ゆえに $\dfrac{\partial f}{\partial t}+c\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}=-c\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)+c\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0$

つまり$f(x,t)=f(x-ct,o)$のとき、必ず上記の微分方程式を満足する。
$f(x,t)$は$f(x,o)$をx方向にct平行移動したものとなる。
⇒$f(x,t)$は時間とともにct、x方向に移動速度cで移動する。

② 放物型 $\dfrac{\partial f}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial t}>0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial t}<0$

上に凸⇒時間とともに減少
下に凸⇒時間とともに増加

⇒ 拡散を表す

③ 楕円型 $c\dfrac{\partial f}{\partial x}=a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

平均化

有限差分法

連続関数の導関数を離散点の値を用いて近似する方法

ある関数$f(x,t)$の離散点を$f(x_i,t_j)=f_{i,j}$とする
x_iはΔxおきに、t_jはΔtおきに定義された離散点
テイラー展開より次の2式が得られる。

$$\begin{cases} f_{i+1,j}=f(x_i+\Delta x,t_j)=f_{i,j}+\Delta x\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_i+\dfrac{\Delta x^2}{2!}\cdot\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i+\dfrac{\Delta x^3}{3!}\cdot\left(\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_i+\cdots & Ⓐ \\ f_{i-1,j}=f(x_i-\Delta x,t_j)=f_{i,j}-\Delta x\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_i+\dfrac{\Delta x^2}{2!}\cdot\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i-\dfrac{\Delta x^3}{3!}\cdot\left(\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_i+\cdots & Ⓑ \end{cases}$$

Ⓐ+Ⓑより

$$f_{i+1,j}+f_{i-1,j}=2\cdot f_{i,j}+\Delta x^2\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i+O(\Delta x^4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i=\frac{f_{i+1,j}-2\cdot f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)$$

⇒ 中心差分

Ⓐより

$$f_{i+1,j}-f_{i,j}=\Delta x\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i=\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta x}$$

⇒ 前進差分

Ⓑより

$$f_{i,j}-f_{i-1,j}=\Delta x\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i=\frac{f_{i,j}-f_{i-1,j}}{\Delta x}$$

⇒ 後退差分

陽解法と陰解法

放物型の方程式において拡散係数を1とすると

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

この式から両辺に有限差分を適用して

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} = \frac{f_{i+1,j} - 2 \cdot f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{f_{i,j+1}}_{t=t+\Delta t\text{の値}} = \underbrace{f_{i,j} + \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x^2}}_{r} \cdot \left\{ f_{i+1,j} - 2 \cdot f_{i,j} + f_{i-1,j} \right\}}_{t=t\text{の値}}$$

以上より陽解法及び陰解法は次のように定義できる。

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} + r\left\{ f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j} \right\}$$

陽解法

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} + r\left\{ f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} \right\}$$

$$(1+2r)f_{i,j+1} = f_{i,j} + r\left\{ f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j+1} \right\}$$

陰解法

1次元定常移流拡散方程式

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)}$$

φ: 解くべき対象　u: 移流速度(ここでは定数)　Γ: 拡散係数

NS方程式 ⇒ φ=u(解くべきuで移流する。⇒非線形方程式)

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = 0$$ ⇒ 時間と共にφは変化しない。

ρ,Γ: 一定 ⇒ $\left.\begin{array}{l} x=0\text{で}\varphi=\varphi_0 \\ x=L\text{で}\varphi=\varphi_L \end{array}\right\}$ のディリクレ問題

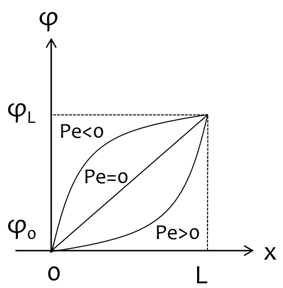
⇓

常微分方程式

⇒解析解

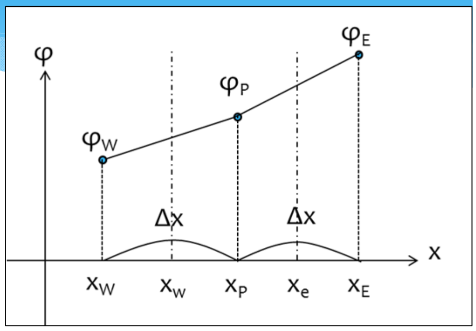
$$\phi = \phi_0 + \frac{\exp\left(\frac{xPe}{L}\right)-1}{\exp(Pe)-1}(\phi_L - \phi_0)$$

$$Pe = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$:(ペクレ数)



有限体積法と離散化

$$(\rho u\phi)_e-(\rho u\phi)_w=\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e-\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w$$



- φの補間

直線近似(結果は中心差分に相当)

$$\phi_e=\frac{1}{2}(\phi_P+\phi_E)\qquad \phi_w=\frac{1}{2}(\phi_W+\phi_P)$$

- $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ の評価：中心差分

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e=\frac{\phi_E-\phi_P}{\Delta x}\qquad \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w=\frac{\phi_P-\phi_W}{\Delta x}$$

ρ,u,ϕ を一定とすると

$$\frac{1}{2}\rho u(\phi_P+\phi_E)-\frac{1}{2}\rho u(\phi_W+\phi_P)=\Gamma\frac{\phi_E-\phi_P}{\Delta x}-\Gamma\frac{\phi_P-\phi_W}{\Delta x}$$

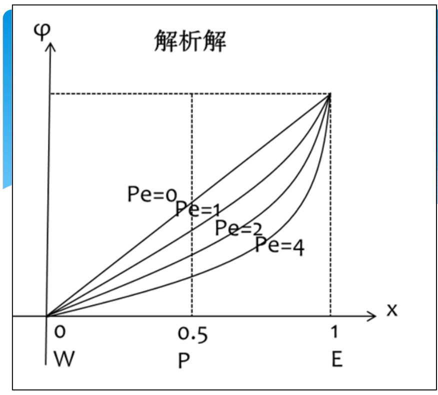
$$\frac{1}{2}\rho u\phi_E-\frac{1}{2}\rho u\phi_W=\frac{\Gamma}{\Delta x}\phi_E-\frac{2\Gamma}{\Delta x}\phi_P+\frac{\Gamma}{\Delta x}\phi_W$$

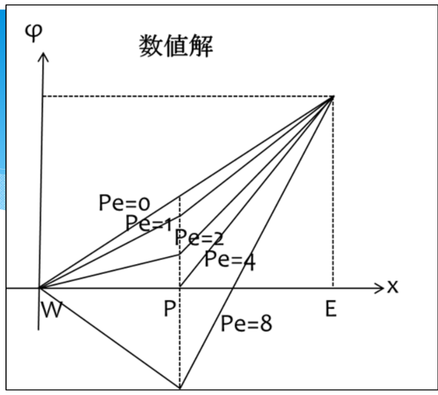
$$\frac{2\Gamma}{\Delta x}\phi_P=\left(\frac{\Gamma}{\Delta x}-\frac{1}{2}\rho u\right)\phi_E+\left(\frac{\Gamma}{\Delta x}+\frac{1}{2}\rho u\right)\phi_W$$

$$\phi_P=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\underline{\frac{\rho u\Delta x}{\Gamma}}\right)\phi_E+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\rho u\Delta x}{\Gamma}\right)\phi_W$$

局所ペクレ数：Pe_L

$$\Rightarrow\ \Delta x=\frac{1}{2}L\ \text{より}\ \ Pe_L=\frac{1}{2}Pe$$





$$\phi = \frac{\exp(xPe)-1}{\exp(Pe)-1}$$

$$\phi(0.5) = \begin{cases} 0.3775(Pe=1) \\ 0.2689(Pe=2) \\ 0.1192(Pe=4) \end{cases}$$

$$\phi_P = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}Pe\right)\phi_E + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}Pe\right)\phi_W$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{8}(Pe=1) & Pe_L = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}(Pe=2) & Pe_L = 1 \\ 0(Pe=4) & Pe_L = 2 \\ -\frac{1}{2}(Pe=8) & Pe_L = 4 \end{cases}$$

局所ペクレ数 : $\dfrac{\rho u \Delta x}{\Gamma}$

⇩

移流と拡散の比

ペクレ数(大) ⇒移流が支配的となる。
(移流:上流の値がそのまま下流に伝わる。)

つまり下流の影響は少なく、下流の情報が悪影響。
⊿xが大 →Peも大
↓
遠い下流の情報が取り込まれる。

一般に局所ペクレ数Pe≧2で解が振動する。
⇒上流の影響だけを取り入れれば良い。

$\varphi_e=\varphi_P$, $\varphi_w=\varphi_W$ (u>0⇒Pe>0) ： 風上化

$$(\rho u\phi)_e-(\rho u\phi)_w=\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e-\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w$$

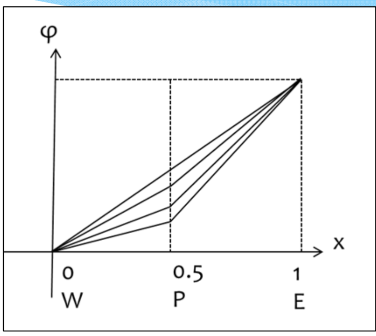
風上化

$$\rho u\phi_P-\rho u\phi_W=\Gamma\frac{\phi_E-\phi_P}{\Delta x}-\Gamma\frac{\phi_P-\phi_W}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\rho u\Delta x}{\Gamma}+2\right)\phi_P=\phi_E+\left(1+\frac{\rho u\Delta x}{\Gamma}\right)\phi_W$$

$$\Rightarrow(Pe_L+2)\phi_P=\phi_E+(1+Pe_L)\phi_W$$

$$\phi_P=\frac{1}{Pe_L+2}=\begin{cases}\frac{2}{5} & Pe=1\left(Pe_L=\frac{1}{2}\right)\\ \frac{1}{3} & Pe=2(Pe_L=1)\\ \frac{1}{4} & Pe=4(Pe_L=2)\\ \frac{1}{6} & Pe=8(Pe_L=4)\end{cases}$$

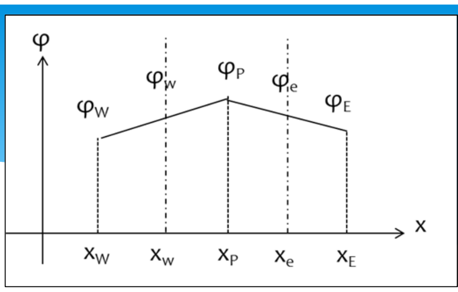


打ち切り誤差の評価

風上補間
セル界面 eの上流計算点の値でφ_eを近似
⇒1次導関数を求める為に(流れ方向に依存して)
後退or前進差分を用いることと同義。

風上差分スキーム
(**U**pwind **D**ifference **S**cheme) **UDS**

$$\phi_e=\begin{cases}\phi_P(\rho u_e>0)\\ \phi_E(\rho u_e<0)\end{cases}$$



$\rho u_w>0$, $\rho u_e>0$ の時

$$\int_w^e \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}dx = (\rho u\phi)_e - (\rho u\phi)_w$$

$$\left[\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}\right]_P \Delta x = \rho u_e\phi_P - \rho u_w\phi_W$$

$\dfrac{\rho u_e\phi_P - \rho u_w\phi_W}{\Delta x}\cdot\Delta x$:風上差分(ρuの評価点は少し異なる)

UDSは決して振動解を伴わないが数値拡散を伴う。

$\rho u_e>0$ の時φのx_P周りのT.E(テイラー展開)

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2}\cdot\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_P + H$$

1次風上 $(x_e - x_P)\cdot\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P$ ･･･が打ち切り誤差となる。

$(\rho u\phi)_e$ では $\rho u_e\cdot\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P$ が最大誤差→ $\rho u_e\cdot\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_P$ だけ少ない。

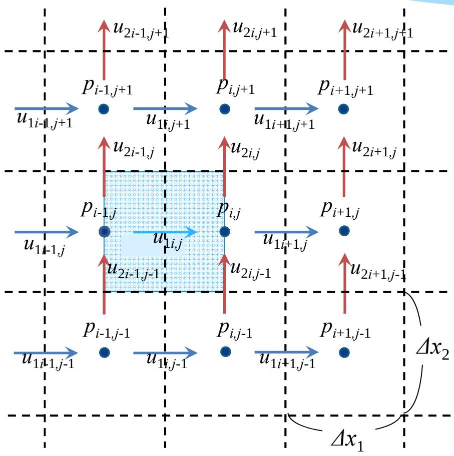
一方拡散項は $\left(\Gamma\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_W$

→拡散項の評価値と同じオーダーの量が移流項の誤差に入る。
→数値拡散→Δxを小さくしないと誤差が大きくなる。

$$\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w = \Gamma\cdot\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \Gamma\cdot\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} = \frac{\Gamma}{\Delta x}\cdot(\phi_E - 2\phi_P + \phi_W)$$

運動量方程式の離散化

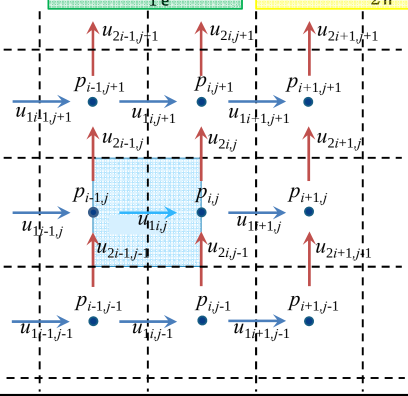
* 直交正方スタッガード格子の導入

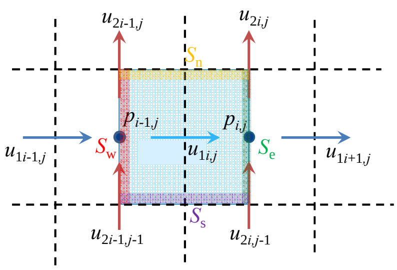


移流項

$$\int_S u_i u_j n_j dS = \int_{S_e} u_{1e}(u_1 \underset{1}{n_1} + u_2 \underset{0}{n_2}) dS_1 + \int_{S_n} u_{1n}(u_1 \underset{0}{n_1} + u_2 \underset{1}{n_2}) dS_2 + \int_{S_w} u_{1w}(u_1 \underset{-1}{n_1} + u_2 \underset{0}{n_2}) dS_3 + \int_{S_n} u_{1s}(u_1 \underset{0}{n_1} + u_2 \underset{-1}{n_2}) dS$$

$$= u_{1e}\underbrace{\left(\frac{1}{2}(u_{1_{i+1,j}} + u_{1_{i,j}})\right)}_{U_{1e}}\Delta x_2 + u_{1n}\underbrace{\left(\frac{1}{2}(u_{2_{i-1,j}} + u_{2_{i,j}})\right)}_{U_{2n}}\Delta x_1 - u_{1w}\underbrace{\left(\frac{1}{2}(u_{1_{i-1,j}} + u_{1_{i,j}})\right)}_{U_{1w}}\Delta x_2 - u_{1s}\underbrace{\left(\frac{1}{2}(u_{2_{i-1,j-1}} + u_{2_{i,j-1}})\right)}_{U_{2s}}\Delta x_1$$





1次風上でu_{1e}〜u_{1s}を補間

$$u_{1_e}\begin{cases} = u_{1_{i,j}} & U_{1_e} \geq 0 \\ = u_{1_{i+1,j}} & U_{1_e} < 0 \end{cases} \qquad u_{1n}\begin{cases} = u_{1_{i,j}} & U_{2_n} \geq 0 \\ = u_{1_{i,j+1}} & U_{2_n} < 0 \end{cases}$$

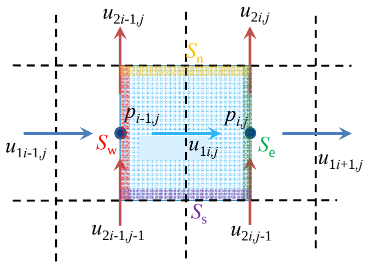
$$u_{1_w}\begin{cases} = u_{1_{i-1,j}} & U_{1_w} \geq 0 \\ = u_{1_{i,j}} & U_{1_w} < 0 \end{cases} \qquad u_{1_s}\begin{cases} = u_{1_{i,j-1}} & U_{2_s} \geq 0 \\ = u_{1_{i,j}} & U_{2_s} < 0 \end{cases}$$

$$u_{1_e} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{1_e}}{\left|U_{1_e}\right|}+1\right)u_{1_{i,j}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{U_{1_e}}{\left|U_{1_e}\right|}+1\right)u_{1_{i+1,j}}$$

$$u_{1_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{2_n}}{\left|U_{2_n}\right|}+1\right)u_{1_{i,j}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{U_{2_n}}{\left|U_{2_n}\right|}+1\right)u_{1_{i,j+1}}$$

$$u_{1_w} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{1_w}}{\left|U_{1_w}\right|}+1\right)u_{1_{i-1,j}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{U_{1_w}}{\left|U_{1_w}\right|}+1\right)u_{1_{i,j}}$$

$$u_{1_s} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{2_s}}{\left|U_{2_s}\right|}+1\right)u_{1_{i,j-1}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{U_{2_s}}{\left|U_{2_s}\right|}+1\right)u_{1_{i,j}}$$

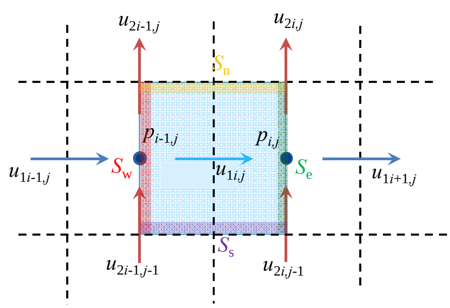


圧力項

$$-\frac{1}{\rho}\int_S p n_i dS = -\frac{1}{\rho}\left\{\int_{S_e} p_e n_1 dS + \int_{S_n} p_n n_1 dS + \int_{S_w} p_w n_1 dS + \int_{S_n} p_s n_1 dS\right\}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\left[p_e \Delta x_2 - p_w \Delta x_2\right] = -\frac{p_e - p_w}{\rho}\Delta x_2 = -\frac{\Delta x_2}{\rho}\left(p_{i,j} - p_{i-1,j}\right)$$

セルが圧力により
x_1方向に押される力



$$\nu\int_S \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j dS$$

拡散項

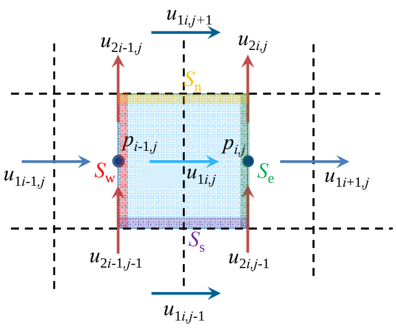
$$=\nu\left[+\int_{S_e}\left(\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right]_e \underbrace{n_1}_{1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \underbrace{n_2}_{0}\right)dS + \int_{S_n}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\underbrace{n_1}_{0} + \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]_n \underbrace{n_2}_{1}\right)dS + \int_{S_w}\left(\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right]_w \underbrace{n_1}_{-1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\underbrace{n_2}_{0}\right)dS + \int_{S_s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\underbrace{n_1}_{0}+\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]_s \underbrace{n_2}_{-1}\right)dS\right]$$

$$=\nu\left(\frac{u_{1_{i+1,j}}-u_{1_{i,j}}}{\Delta x_1}\cdot\Delta x_2+\frac{u_{1_{i,j+1}}-u_{1_{i,j}}}{\Delta x_2}\cdot\Delta x_1-\frac{u_{1_{i,j}}-u_{1_{i-1,j}}}{\Delta x_1}\cdot\Delta x_2-\frac{u_{1_{i,j}}-u_{1_{i,j-1}}}{\Delta x_2}\cdot\Delta x_1\right)$$

$$\Rightarrow \nu\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{u_{1_{i+1,j}}-2u_{1_{i,j}}+u_{1_{i-1,j}}}{\Delta x_1^{\;2}}\right)\Delta x_1\Delta x_2\\ &+\left(\frac{u_{1_{i,j+1}}-2u_{1_{i,j}}+u_{1_{i,j-1}}}{\Delta x_1^{\;2}}\right)\Delta x_1\Delta x_2\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow\left\{-2\nu\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}+\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)\right\}u_{1_{i,j}}+\left(\nu\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)u_{1_{i-1,j}}$$

$$+\left(\nu\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)u_{1_{i+1,j}}+\left(\nu\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)u_{1_{i,j-1}}+\left(\nu\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)u_{1_{i,j+1}}$$



$$a_{1p}u_{1_{i,j}}=a_{1e}u_{1_{i-1,j}}+a_{1w}u_{1_{i+1,j}}+a_{1s}u_{1_{i,j-1}}+a_{1n}u_{1_{i,j+1}}+A_{1p}\left(P_{i-1,j}-P_{i,j}\right)$$

$$a_{1p}=\frac{1}{2}U_{1_e}\left(\frac{U_{1_e}}{\left|U_{1_e}\right|}+1\right)\Delta x_2+\frac{1}{2}U_{2_n}\left(\frac{U_{2_n}}{\left|U_{2_n}\right|}+1\right)\Delta x_1-\frac{1}{2}U_{1_w}\left(\frac{-U_{1_w}}{\left|U_{1_w}\right|}+1\right)\Delta x_2-\frac{1}{2}U_{2_s}\left(\frac{-U_{2_s}}{\left|U_{2_s}\right|}+1\right)\Delta x_1$$

$$+2\nu\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}+\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)$$

$$a_{1w}=\frac{1}{2}U_{1_w}\left(\frac{U_{1_w}}{\left|U_{1_w}\right|}+1\right)\Delta y+\left(\nu\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)$$

$$a_{1e}=-\frac{1}{2}U_{1_e}\left(\frac{-U_{1_e}}{\left|U_{1_e}\right|}+1\right)\Delta x_2+\left(\nu\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)$$

$$a_{1s}=\frac{1}{2}U_{2_s}\left(\frac{U_{2_s}}{\left|U_{2_s}\right|}+1\right)\Delta x_1+\left(\nu\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)$$

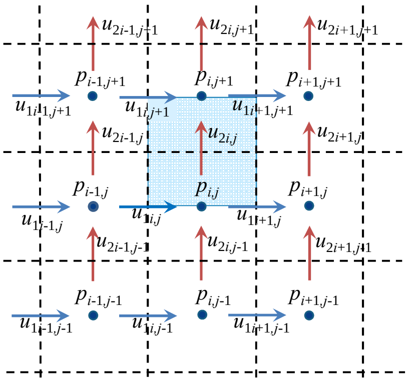
$$a_{1s}=-\frac{1}{2}U_{2_n}\left(\frac{-U_{2_n}}{\left|U_{2_n}\right|}+1\right)\Delta x_1+\left(\nu\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)$$

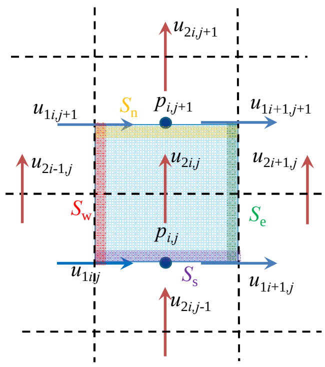
$$A_{1p}=\frac{\Delta x_2}{\rho}$$

移流項

$$\int_S u_i u_j n_j dS = \int_{S_e} u_{2e}(u_1 \underbrace{n_1}_{1} + u_2 \underbrace{n_2}_{0}) dS_1 + \int_{S_n} u_{2n}(u_1 \underbrace{n_1}_{0} + u_2 \underbrace{n_2}_{1}) dS_2 + \int_{S_w} u_{2w}(u_1 \underbrace{n_1}_{-1} + u_2 \underbrace{n_2}_{0}) dS_3 + \int_{S_s} u_{2s}(u_1 \underbrace{n_1}_{0} + u_2 \underbrace{n_2}_{-1}) dS$$

$$= u_{2e}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(u_{1_{i+1,j}} + u_{1_{i+1,j+1}}\right)\right)}_{\mathbf{U}_{1e}}\Delta x_2 + u_{2n}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(u_{2_{i,j}} + u_{2_{i,j+1}}\right)\right)}_{\mathbf{U}_{2n}}\Delta x_1 - u_{2w}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(u_{1_{i,j}} + u_{1_{i,j+1}}\right)\right)}_{\mathbf{U}_{1w}}\Delta x_2 - u_{2s}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\left(u_{2_{i,j-1}} + u_{2_{i,j}}\right)\right)}_{\mathbf{U}_{2s}}\Delta x_1$$





1次風上でu_{2e}～u_{2s}を補間

$$u_{2_e}\begin{cases} = u_{2_{i,j}} & U_{1_e} \geq 0 \\ = u_{2_{i+1,j}} & U_{1_e} < 0 \end{cases} \qquad u_{2n}\begin{cases} = u_{2_{i,j}} & U_{2_n} \geq 0 \\ = u_{2_{i,j+1}} & U_{2_n} < 0 \end{cases}$$

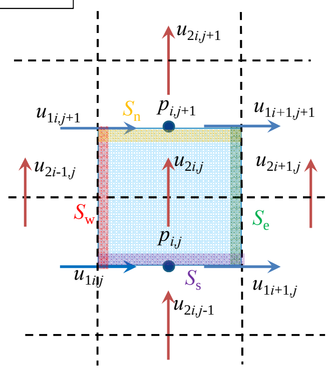
$$u_{2_w}\begin{cases} = u_{2_{i-1,j}} & U_{1_w} \geq 0 \\ = u_{2_{i,j}} & U_{1_w} < 0 \end{cases} \qquad u_{2_s}\begin{cases} = u_{2_{i,j-1}} & U_{2_s} \geq 0 \\ = u_{2_{i,j}} & U_{2_s} < 0 \end{cases}$$

$$u_{2_e} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{1_e}}{|U_{1_e}|}+1\right)u_{2_{i,j}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{U_{1_e}}{|U_{1_e}|}+1\right)u_{2_{i+1,j}}$$

$$u_{2_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{2_n}}{|U_{2_n}|}+1\right)u_{2_{i,j}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{U_{2_n}}{|U_{2_n}|}+1\right)u_{2_{i,j+1}}$$

$$u_{2_w} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{1_w}}{|U_{1_w}|}+1\right)u_{2_{i-1,j}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{U_{1_w}}{|U_{1_w}|}+1\right)u_{2_{i,j}}$$

$$u_{2_s} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_{2_s}}{|U_{2_s}|}+1\right)u_{2_{i,j-1}} + \frac{1}{2}\left(-\frac{U_{2_s}}{|U_{2_s}|}+1\right)u_{2_{i,j}}$$

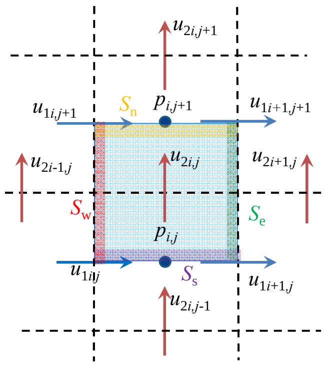


圧力項

$$-\frac{1}{\rho}\int_S p n_i dS = -\frac{1}{\rho}\left\{\int_{S_e} p_e n_2 dS + \int_{S_n} p_n n_2 dS + \int_{S_w} p_w n_2 dS + \int_{S_n} p_s n_2 dS\right\}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\left[p_n \Delta x_1 - p_s \Delta x_1\right] = -\frac{p_n - p_s}{\rho}\Delta x_1 = -\frac{\Delta x_1}{\rho}\left(p_{i,j+1} - p_{i,j}\right)$$

セルが圧力により
x_1 方向に押される力



$$\nu\int_S \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j dS$$

拡散項

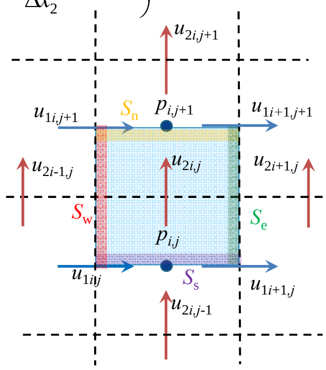
$$= \nu\left[+\int_{S_e}\left(\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right]_e \underbrace{n_1}_{1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\underbrace{n_2}_{0}\right)dS + \int_{S_n}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\underbrace{n_1}_{0} + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right]_n \underbrace{n_2}_{1}\right)dS + \int_{S_w}\left(\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right]_w \underbrace{n_1}_{-1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\underbrace{n_2}_{0}\right)dS + \int_{S_s}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\underbrace{n_1}_{0} + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right]_s \underbrace{n_2}_{-1}\right)dS\right]$$

$$= \nu\left(\frac{u_{2_{i+1,j}} - u_{2_{i,j}}}{\Delta x_1}\cdot\Delta x_2 + \frac{u_{2_{i,j+1}} - u_{2_{i,J}}}{\Delta x_2}\cdot\Delta x_1 - \frac{u_{2_{i,j}} - u_{2_{i-1,j}}}{\Delta x_1}\cdot\Delta x_2 - \frac{u_{2_{i,j}} - u_{2_{i,j-1}}}{\Delta x_2}\cdot\Delta x_1\right)$$

$$\Rightarrow \nu\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{u_{2_{i+1,j}} - 2u_{2_{i,j}} + u_{2_{i-1,j}}}{\Delta x_1{}^2}\right)\Delta x_1 \Delta x_2 \\ &+\left(\frac{u_{2_{i,j+1}} - 2u_{2_{i,j}} + u_{2_{i,j-1}}}{\Delta x_1{}^2}\right)\Delta x_1 \Delta x_2\end{aligned}\right\}$$

$$\to \left\{-2\nu\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)\right\}u_{2_{i,j}} + \left(\nu\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)u_{2_{i-1,j}}$$

$$+\left(\nu\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)u_{2_{i+1,j}} + \left(\nu\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)u_{2_{i,j-1}} + \left(\nu\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)u_{2_{i,j+1}}$$



$$a_{2p}u_{2_{i,j}} = a_{2e}u_{2_{i-1,j}} + a_{2w}u_{2_{i+1,j}} + a_{2s}u_{2_{i,j-1}} + a_{2n}u_{2_{i,j+1}} + A_{2p}\left(p_{i,j} - p_{i,j+1}\right)$$

$$a_{2p} = \frac{1}{2}U_{1_e}\left(\frac{U_{1_e}}{\left|U_{1_e}\right|}+1\right)\Delta x_2 + \frac{1}{2}U_{2_n}\left(\frac{U_{2_n}}{\left|U_{2_n}\right|}+1\right)\Delta x_1 - \frac{1}{2}U_{1_w}\left(\frac{-U_{1_w}}{\left|U_{1_w}\right|}+1\right)\Delta x_2 - \frac{1}{2}U_{2_s}\left(\frac{-U_{2_s}}{\left|U_{2_s}\right|}+1\right)\Delta x_1$$

$$+2\nu\left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)$$

$$a_{2w} = \frac{1}{2}U_{1_w}\left(\frac{U_{1_w}}{\left|U_{1_w}\right|}+1\right)\Delta y + \left(\nu\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)$$

$$a_{2e} = -\frac{1}{2}U_{1_e}\left(\frac{-U_{1_e}}{\left|U_{1_e}\right|}+1\right)\Delta x_2 + \left(\nu\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)$$

移流-圧力-拡散＝0

$$a_{2s} = \frac{1}{2}U_{2_s}\left(\frac{U_{2_s}}{\left|U_{2_s}\right|}+1\right)\Delta x_1 + \left(\nu\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)$$

$$a_{2s} = -\frac{1}{2}U_{2_n}\left(\frac{-U_{2_n}}{\left|U_{2_n}\right|}+1\right)\Delta x_1 + \left(\nu\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)$$

$$A_{2p} = \frac{\Delta x_1}{\rho}$$

Velocity-Pressure Coupling

SIMPLE(Semi-Implicit Pressure Linked Equation) by Patanker

①predictor step⇒②Corrector Step

P^*→u_1^*, u_2^* ⇒P= P^*+P’, u_1= u_1^*+ u_1', u_2= u_2^*+ u_2'
P, u_1,u_2⇒correct value

$$\begin{cases} ① : a_{1p_{i,j}}u^*_{1_{i,j}} = \sum a_{1nb}u^*_{1nb} + A_{1p_{i,j}}\left(p^*_{i-1,j} - p^*_{i,j}\right)\cdots(1) \\ ② : a_{2p_{i,j}}u^*_{2_{i,j}} = \sum a_{2nb}u^*_{2nb} + A_{2p_{i,j}}\left(p^*_{i,j} - p^*_{i,j+1}\right)\cdots(2) \end{cases}$$

P^*：予測値→1ステップ前の値⇒u_1^*, u_2^*が求められる。

P= P^*+P’, u_1= u_1^*+ u_1', u_2= u_2^*+ u_2'→正しい値
P, u_1, u_2：質量保存則と運動量保存則を満たす。

①，②より

$$\begin{cases} a_{1p_{i,j}} u'_{1_{i,j}} = \sum a_{1nb} u'_{1nb} + A_{1pi,j}\left(p'_{i-1,j} - p'_{i,j}\right) \\ a_{2p_{i,j}} u'_{2_{i,j}} = \sum a_{2nb} u'_{2nb} + A_{2p_{i,j}}\left(p'_{i,j} - p'_{i,j+1}\right) \end{cases}$$

$\sum a_{1nb} u'_{1nb}$, $\sum a_{2nb} u'_{2nb}$ の影響を(とりあえず)無視

$$\begin{cases} u'_{1_{i,j}} = \dfrac{A_{1p_{i,j}}}{a_{1p_{i,j}}}\left(p'_{i-1,j} - p'_{i,j}\right) \\ u'_{2_{i,j}} = \dfrac{A_{2p_{i,j}}}{a_{2p_{i,j}}}\left(p'_{i,j} - p'_{i,j+1}\right) \end{cases}$$

$$u_{1_{i,j}} = u^*_{1_{i,j}} + \frac{A_{1p_{i,j}}}{a_{1p_{i,j}}}\left(p'_{i-1,j} - p'_{i,j}\right)$$

$$u_{2_{i,j}} = u^*_{2_{i,j}} + \frac{A_{2p_{i,j}}}{a_{2p_{i,j}}}\left(p'_{i,j} - p'_{i,j+1}\right)$$

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV = \int_S u_i n_i dS = 0$$

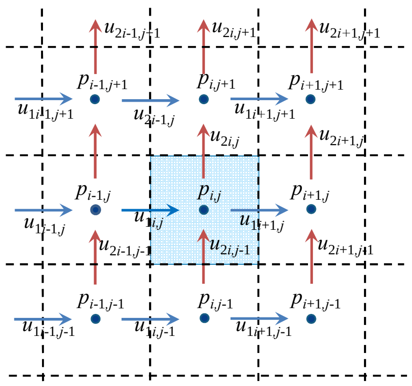
質量保存則

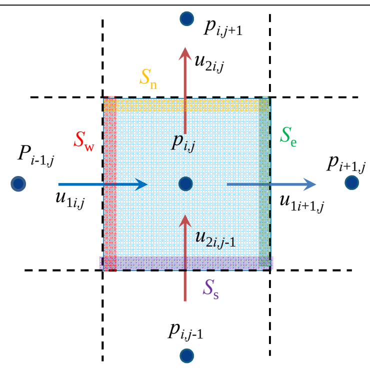
$$= \int_{S_e} u_1 dS + \int_{S_n} u_2 dS + \int_{S_w} -u_1 dS + \int_{S_s} -u_2 dS = u_{1_{i+1,j}} \Delta x_2 + u_{2_{i,j}} \Delta x_1 - u_{1_{i,j}} \Delta x_2 - u_{2_{i,j-1}} \Delta x_1$$

$$= \left(u_{1_{i+1,j}} - u_{1_{i,j}}\right)\Delta x_2 + \left(u_{2_{i,j}} - u_{2_{i,j-1}}\right)\Delta x_1 = 0$$

$$u_{1_{i,j}} = u^*_{1_{i,j}} + \frac{A_{1p_{i,j}}}{a_{1p_{i,j}}}\left(p'_{i-1,j} - p'_{i,j}\right)$$

$$u_{2_{i,j}} = u^*_{2_{i,j}} + \frac{A_{2p_{i,j}}}{a_{2p_{i,j}}}\left(p'_{i,j} - p'_{i,j+1}\right)$$



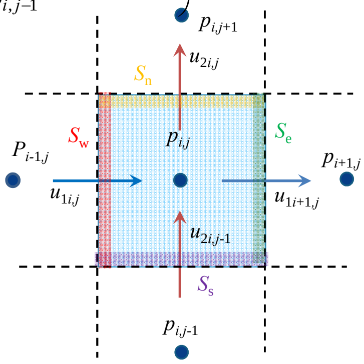


質量保存則

$$(u_{1_{i+1,j}} - u_{1_{i,j}})\Delta x_2 + (u_{2_{i,j}} - u_{2_{i,j-1}})\Delta x_1 = 0$$

$$\left(u^*_{1_{i+1,j}} + \frac{A_{1p_{i+1,j}}}{a_{1p_{i+1,j}}}(p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) - u^*_{1_{i,j}} - \frac{A_{1p_{i,j}}}{a_{1p_{i,j}}}(p'_{i-1,j} - p'_{i,j})\right)\Delta x_2$$

$$+\left(u^*_{2_{i,j}} + \frac{A_{2p_{i,j}}}{a_{2p_{i,j}}}(p'_{i,j} - p'_{i,j+1}) - u^*_{2_{i,j-1}} - \frac{A_{2p_{i,j-1}}}{a_{2p_{i,j-1}}}(p'_{i,j-1} - p'_{i,j})\right)\Delta x_1 = 0$$



質量保存則

$$C_{P_{i,j}} p'_{i,j} = C_{W_{i,j}} p'_{i-1,j} + C_{E_{i,j}} p'_{i+1,j} + C_{S_{i,j}} p'_{i,j-1} + C_{N_{i,j}} p'_{i,j+1} + C_{C_{i,j}}$$

$$C_{P_{i,j}} = (d_{1_{i,j}} + d_{1_{i+1,j}})\Delta x_2 + (d_{2_{i,j}} + d_{2_{i,j-1}})\Delta x_1$$

$$C_{W_{i,j}} = d_{1_{i,j}} \Delta x_2$$

$$C_{E_{i,j}} = d_{1_{i+1,j}} \Delta x_2$$

$$C_{S_{i,j}} = d_{2_{i,j-1}} \Delta x_1$$

$$C_{N_{i,j}} = d_{2_{i,j}} \Delta x_1$$

$$C_{C_{i,j}} = -\left[(u^*_{1_{i+1,j}} - u^*_{1_{i,j}})\Delta x_2 + (u^*_{2_{i,j}} - u^*_{2_{i,j-1}})\Delta x_1\right]$$

$$d_{1_{i,j}} = \frac{A_{1p_{i,j}}}{a_{1p_{i,j}}},\quad d_{2_{i,j}} = \frac{A_{2p_{i,j}}}{a_{2p_{i,j}}}$$